解答速報

順天堂大学医学部　数学

2025年 2月 3日実施

I　$\boxed{}$ に適する解答をマークせよ。

(1)　一般項が $a_n = 2^{n+3}3^{-n}$ で与えられる数列 $\{a_n\}$ について，$a_n < 1$ を満たす最小の n の値は $\boxed{\text{ア}}$ である。

また，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \boxed{\text{イウ}}$ である。一般項が $b_n = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$ で与えられる数列 $\{b_n\}$ について，$b_n < 1$ を満たす最小の n の値は $\boxed{\text{エオ}}$ である。 ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

解答

(1)　$a_n < 1$ のとき，$2^{n+3} \cdot 3^{-n} < 1$ より $2^{n+3} < 3^n$

n	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
2^{n+3}	16	32	64	128	256	512	$\cdots$
3^n	3	9	27	81	243	729	$\cdots$

表より，$a_n < 1$ となる最小の n の値は $n = \mathbf{6}$ である。

また

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

したがって，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は初項 $\dfrac{16}{3}$，公比 $\dfrac{2}{3}$ の無限等比級数であるから，$\left|\dfrac{2}{3}\right| < 1$ とあわせて

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{\frac{16}{3}}{1-\frac{2}{3}} = \mathbf{16}$$

$\{b_n\}$ の一般項を計算すると

$$\begin{aligned} b_n &= a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n \\ &= 2^{4+5+\cdots+(n+3)} \cdot 3^{-(1+2+\cdots+n)} \\ &= 2^{\frac{n(n+7)}{2}} \cdot 3^{-\frac{n(n+1)}{2}} \end{aligned}$$

より，$b_n < 1$ のとき

$$2^{\frac{n(n+7)}{2}} < 3^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$2^{n+7} < 3^{n+1}$$

$$(n+7)\log_{10} 2 < (n+1)\log_{10} 3$$

$$n(\log_{10} 3 - \log_{10} 2) > 7\log_{10} 2 - \log_{10} 3$$

$$n > \frac{7\log_{10} 2 - \log_{10} 3}{\log_{10} 3 - \log_{10} 2} = \frac{1.6299}{0.1761} (= 9.2\cdots\cdots)$$

よって，求める最小の n の値は $n = \mathbf{10}$ である。

Ⅰ $\boxed{}$ に適する解答をマークせよ。

(2) 四面体 OABC において，$\angle\mathrm{AOB} = \angle\mathrm{BOC} = \angle\mathrm{AOC} = 60^\circ$，$\mathrm{OA} = 9$，$\mathrm{OB} = 3$，$\mathrm{OC} = 6$ である。点 P は辺 OA 上を，点 Q は辺 BC 上をそれぞれ独立に動く。このとき，線分 PQ を 2 : 1 に内分する点を R とする。

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}}\ (0 \leqq s \leqq 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}} + t\overrightarrow{\mathrm{OC}}\ (0 \leqq t \leqq 1)$ とし，辺 OB を 2 : 1 に内分する点を D とすると，

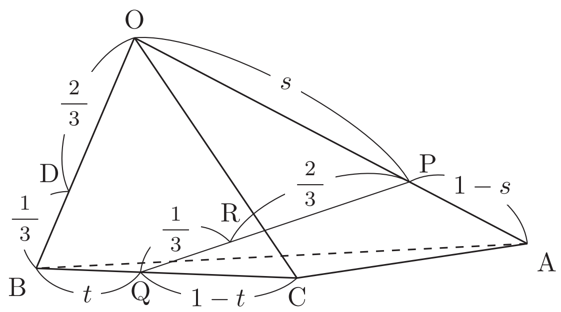
$$\overrightarrow{\mathrm{DR}} = s\vec{k} + t\vec{l},\quad \vec{k} = \frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\overrightarrow{\mathrm{OA}},\quad \vec{l} = \frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

と表され，点 R はある平面上を動くことがわかる。この平面を H とすると，

$|\vec{k}|^2 = \boxed{キ}$，$|\vec{l}|^2 = \boxed{クケ}$，$\vec{k}\cdot\vec{l} = \boxed{コ}$ より，平面 H 上で点 R が描く図形の面積は $\boxed{サ}\sqrt{\boxed{シス}}$ である。

解答

(2) $\overrightarrow{\mathrm{DR}} = \overrightarrow{\mathrm{OR}} - \overrightarrow{\mathrm{OD}}$



点 R は辺 PQ を 2 : 1 に内分した点であるため，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OR}} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\\ &= \frac{1}{3}s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{2}{3}(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{2}{3}t\overrightarrow{\mathrm{OC}}\end{aligned}$$

一方，点 D は辺 OB を 2 : 1 に内分する点であるため，$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ である。

以上をまとめると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{DR}} &= \overrightarrow{\mathrm{OR}} - \overrightarrow{\mathrm{OD}}\\ &= \frac{1}{3}s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{2}{3}(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{2}{3}t\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\ &= \frac{1}{3}s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\end{aligned}$$

であるため，

$$\vec{k} = \boldsymbol{\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}},\quad \vec{l} = \boldsymbol{\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}}$$

となる。

$$\begin{aligned}|\vec{k}|^2 &= \frac{1}{9}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2\\ &= \boldsymbol{9}\end{aligned}$$

$$|\vec{l}|^2 = \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{4}{9}\left(|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} + |\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2\right) \\
&= \frac{4}{9}\left(9 - 2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cdot|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\cos\angle\mathrm{BOC} + 36\right) \\
&= \frac{4}{9}\left(9 - 2\cdot 3\cdot 6\cdot\frac{1}{2} + 36\right) \\
&= \frac{4}{9}(9 - 18 + 36) \\
&= \mathbf{12}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{l} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) \\
&= \frac{2}{9}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) \\
&= \frac{2}{9}\left(|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\cdot|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\cos\angle\mathrm{AOC} - |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\cdot|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\angle\mathrm{AOB}\right) \\
&= \frac{2}{9}\left(9\cdot 6\cdot\frac{1}{2} - 9\cdot 3\cdot\frac{1}{2}\right) \\
&= \mathbf{3}
\end{aligned}
$$

$0 \leqq s \leqq 1,\ 0 \leqq t \leqq 1$ より点 R が描く図形は $\overrightarrow{k}$ と $\overrightarrow{l}$ によって作られる平行四辺形になる。よって，その面積は

$$
\begin{aligned}
\sqrt{|\overrightarrow{k}|^2|\overrightarrow{l}|^2 - (\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{l})^2} &= \sqrt{9\cdot 12 - 3^2} \\
&= \mathbf{3\sqrt{11}}
\end{aligned}
$$

I 　$\boxed{}$ に適する解答をマークせよ。

(3)　4 次方程式 $P(x) = x^4 - 54x^2 - 40x + 269 = 0$ を考える。

$x = y + b$ とおいたとき，$P(y+b) = y^4 - 4y^3 - 48y^2 + 64y + 256$ となる定数 b の値は $b = \boxed{\text{アイ}}$ である。さらに $y = az$ とおいて，$P(az+b) = cz^4 - cz^3 + dz^2 + cz + c$ となるように定数 a を選ぶと $a = \boxed{\text{ウ}}$ であり，このときの定数 c と d の値は $c = \boxed{\text{エオカ}}$，$d = \boxed{\text{キクケコ}}$ である。

方程式 $P(az+b) = 0$ において，$t = z - \dfrac{1}{z}$ とおくと $t = \dfrac{\boxed{\text{サ}} \pm \sqrt{\boxed{\text{シ}}}}{\boxed{\text{ス}}}$ である。

方程式 $P(x) = 0$ の実数解のうちで最大のものは

$x = \sqrt{\boxed{\text{セ}}} + \sqrt{\boxed{\text{ソタ}} + \boxed{\text{チ}} + \sqrt{\boxed{\text{ツ}}}}$ である。

解答

(3)

$$P(y+b) = (y+b)^4 - 54(y+b)^2 - 40(y+b) + 269 \quad \cdots\cdots ①$$
$$= y^4 - 4y^3 - 48y^2 + 64y + 256 \quad \cdots\cdots ②$$

①，② の y の 3 次の項の係数を比較して

$${}_4\mathrm{C}_1 \cdot b^1 = -4$$
$$\iff b = \mathbf{-1} \quad (\text{このとき，①，②の式は一致する})$$

これより

$$P(az+b) = (az-1)^4 - 54(az-1)^2 - 40(az-1) + 269 \quad \cdots\cdots ③$$
$$= cz^4 - cz^3 + dz^2 + cz + c \quad \cdots\cdots ④$$

③，④ の z の 4 次，3 次，2 次の項の係数を比較して

$$\begin{cases} a^4 = c \\ {}_4\mathrm{C}_1 \cdot a^3 \cdot (-1)^1 = -c \\ {}_4\mathrm{C}_2 \cdot a^2 \cdot (-1)^2 - 54a^2 = d \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a^4 = c \quad \cdots\cdots ⑤ \\ 4a^3 = c \quad \cdots\cdots ⑥ \\ -48a^2 = d \quad \cdots\cdots ⑦ \end{cases}$$

⑤，⑥ から c を消去して

$$a^3(a-4) = 0 \iff a = 0,\ 4$$

$a = 0$ のとき，$y = 0$ より $x = -1$ となるが $P(-1) = 0$ を満たさず不適。
$a = 4$ のとき，①，③ より $c = 256,\ d = -768$
このとき，③，④ の式は一致する。
よって，$a = \mathbf{4},\ c = \mathbf{256},\ d = \mathbf{-768}$
$P(az+b) = 0$ を変形すると

$$z^4 - z^3 - 3z^2 + z + 1 = 0$$

$z=0$ はこの方程式を満たさないので，$z^2\ (\fallingdotseq 0)$ で割って

$$\begin{aligned}
&z^2-z-3+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}=0\\
\iff &\left(z-\frac{1}{z}\right)^2-\left(z-\frac{1}{z}\right)-1=0\\
\iff &t^2-t-1=0\\
\iff &t=\boldsymbol{\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}}
\end{aligned}$$

$t=z-\dfrac{1}{z}$ より

$$\begin{aligned}
&z-\frac{1}{z}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\\
\iff &2z^2-(1\pm\sqrt{5})z-2=0\\
\iff &z=\frac{(1\pm\sqrt{5})+\sqrt{22\pm2\sqrt{5}}}{4},\ \frac{(1\pm\sqrt{5})-\sqrt{22\pm2\sqrt{5}}}{4}\quad\text{(複号同順)}
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
x&=4z-1\\
&=\pm\sqrt{5}+\sqrt{22\pm2\sqrt{5}},\ \pm\sqrt{5}-\sqrt{22\pm2\sqrt{5}}\quad\text{(複号同順)}
\end{aligned}$$

したがって，求める実数解のうちで最大のものは

$$x=\boldsymbol{\sqrt{5}+\sqrt{22+2\sqrt{5}}}$$

I　$\boxed{}$ に適する解答をマークせよ。

(4)　次の $\boxed{ア}$ ～ $\boxed{エ}$ に当てはまるものを，下の (A)～(D) から選べ。

(a)　実数 x について，$0<|x+2|-|x-1|<3$ は $-1<x<1$ であるための $\boxed{ア}$。

(b)　実数 x が有理数 a, b を用いて a^b と表せることは，x が有理数であるための $\boxed{イ}$

(c)　無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が収束することは，数列 $\{a_n\}$ が $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$ を満たすための $\boxed{ウ}$ 。

(d)　m, n, l を整数とする。$m^2+n^2+l^2$ が奇数であることは，$m+n+l$ が奇数であるための $\boxed{エ}$。

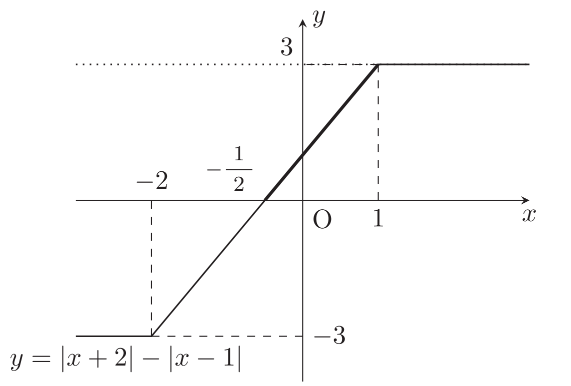
(A)　必要十分条件である
(B)　必要条件であるが，十分条件ではない
(C)　十分条件であるが，必要条件ではない
(D)　必要条件でも十分条件でもない

$\boxed{\text{解答}}$

(a)　$0<|x+2|-|x-1|<3$ を解く。

$$f(x)=\begin{cases}-3 & (x\leqq -2 \text{ のとき})\\ 2x+1 & (-2\leqq x\leqq 1 \text{ のとき})\\ 3 & (1\leqq x \text{ のとき})\end{cases}$$

この $y=f(x)$ のグラフを図示すると，下図のようになる。



よって，$0<f(x)<3$ の解は $-\dfrac{1}{2}<x<1$ である。

ゆえに，$0<f(x)<3$ は $-1<x<1$ であるための **十分条件であるが，必要条件ではない (C)**

(b)　「実数 x が有理数 a, b を用いて $x=a^b$ と表せる $\Longrightarrow$ x は有理数」は偽である。

反例：$a=2$, $b=\dfrac{1}{2}$ のとき，$x=a^b=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$ は無理数である。

「実数 x が有理数 a, b を用いて $x=a^b$ と表せる $\Longleftarrow$ x は有理数」は真である。

証明：有理数 x に対して，$a=x$, $b=1$ とすれば $x=a^b$ と表せる。■

ゆえに，実数 x が有理数 a, b を用いて $x=a^b$ と表せることは，x が有理数であるための
必要条件であるが，十分条件ではない (B)

(c)　「$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が収束する $\Longrightarrow$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$」は真である。

証明：$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha$ とする。$a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_n - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \quad (n \geqq 2)$ より，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_n - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \right\} = \alpha - \alpha = 0 \ ■$$

「$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束する $\Longleftarrow \displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$」は偽である。

反例：$a_n = \log\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0$ であるが，

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \log\left(\frac{k+1}{k}\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \{\log(k+1) - \log k\} = \lim_{n\to\infty} \log(n+1) = \infty$ となり収束しない。

ゆえに，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束することは，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ を満たすための **十分条件であるが，必要条件ではない (C)**

(d)　m，n，l を整数とする。「$m^2 + n^2 + l^2$ が奇数 $\Longrightarrow l + m + n$ が奇数」は真である。

証明：$m^2 + n^2 + l^2$ が奇数のとき，

(i) m，n，l はすべて奇数，または，(ii) m，n，l のうち 2 つは偶数で 1 つは奇数

のいずれかである。この (i)(ii) のいずれの場合も $m + n + l$ は奇数である。■

「$m^2 + n^2 + l^2$ が奇数 $\Longleftarrow l + m + n$ が奇数」は真である。

証明：$m + n + l$ が奇数のとき，

(iii) m，n，l はすべて奇数，または，(iv) m，n，l のうち 2 つは偶数で 1 つは奇数

のいずれかである。この (iii)(iv) のいずれの場合も $m^2 + n^2 + l^2$ は奇数である。■

ゆえに，$m^2 + n^2 + l^2$ が奇数であることは，$m + n + l$ が奇数であるための **必要十分条件である (A)**

$\boxed{\text{II}}$ $\boxed{}$ に適する解答をマークせよ。ただし，同一問題で同じ記号の $\boxed{}$ がある場合は同一の値が入る。

3 次関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d\ (a \neq 0)$ について，以下の (a), (b), (c) それぞれの場合における定数 $a,\ b,\ c,\ d$ の値を求めよ。

(a) 3 次関数 $f(x)$ は以下の条件 (i), (ii) を満たす。

条件 (i) ： $y = f(x)$ のグラフは直線 $y = 6x$ と 3 個の共有点 $(-2,\ -12)$, $(1,\ 6)$, $(4,\ 24)$ を持つ。

条件 (ii) ： $f(x)$ の $x = -2$ における微分係数が -3 である。

このとき，条件 (i) より

$$f(x) - 6x = a\left(x + \boxed{\text{ア}}\right)\left(x - \boxed{\text{イ}}\right)\left(x - \boxed{\text{ウ}}\right)$$

となる。ただし，$\boxed{\text{イ}} < \boxed{\text{ウ}}$ である。さらに，条件 (ii) を考慮して

$$a = \frac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}},\quad b = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}},\quad c = \boxed{\text{ケ}},\quad d = \boxed{\text{コサ}}$$ を得る。

(b) 3 次関数 $f(x)$ は以下の条件 (i), (ii) を満たす。

条件 (i) ： $y = f(x)$ のグラフは直線 $y = 6x$ と点 $(1,\ 6)$ で接し，かつ共有点 $(4,\ 24)$ を持つ。

条件 (ii) ： $y = f(x)$ のグラフは直線 $y = 6x - 12$ と接する。

このとき，

$a = \boxed{\text{シ}}$, $b = \boxed{\text{スセソ}}$, $c = \boxed{\text{タチ}}$, $d = \boxed{\text{ツテト}}$ である。

(c) 3 次関数 $f(x)$ は以下の条件 (i), (ii) を満たす。

条件 (i) ： $y = f(x)$ のグラフは直線 $y = 6x$ と点 $(1,\ 6)$ で接し，他に共有点はない。

条件 (ii) ： $f(x)$ は $x = -3$ で極値をとる。

このとき，

$$a = \frac{\boxed{\text{ナニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}},\quad b = \frac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}},\quad c = \frac{\boxed{\text{ハヒ}}}{\boxed{\text{フ}}},\quad d = \frac{\boxed{\text{ヘ}}}{\boxed{\text{ホ}}}$$ である。

解答

(a) 条件 (i) より，

方程式 $f(x) = 6x$ の解は $x = -2,\ 1,\ 6$

すなわち，

3 次方程式 $f(x) - 6x = 0$ は $(x + 2)$, $(x - 1)$, $(x - 4)$ を因数にもつ

から，

$$f(x) - 6x = a(x + \mathbf{2})(x - \mathbf{1})(x - \mathbf{4})$$

と表せる。この両辺を微分して

$$\begin{aligned} f'(x) - 6 &= a\left\{(x+2)'(x-1)(x-4) + (x+2)(x-1)'(x-4) + (x+2)(x-1)(x-4)'\right\} \\ &= a\left\{(x-1)(x-4) + (x+2)(x-4) + (x+2)(x-1)\right\} \end{aligned}$$

この両辺に $x = -2$ を代入し，条件 (ii) を用いると

$$f'(-2) - 6 = a\left\{(-3)(-6) + 0 + 0\right\}$$
$$-3 - 6 = 18a$$

$$\therefore\ a = -\frac{1}{2}$$

よって，

$$f(x)-6x=-\frac{1}{2}(x+2)(x-1)(x-4)$$
$$\therefore \boldsymbol{f(x)=\frac{-1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2+9x-4}$$

(b)　(a) と同様に考えて，条件 (ii) より

$$f(x)-6x=a(x-1)^2(x-4)$$
$$\therefore\ f(x)=a(x-1)^2(x-4)+6x\ \cdots\cdots①$$

と表せる。

よって，

$$f'(x)=a\left\{2(x-1)(x-4)+(x-1)^2\right\}+6$$

である。

条件 (ii) より，$y=f(x)$ と $y=6x-12$ ($=g(x)$ とする) が接するので，

接点の x 座標を t ($\fallingdotseq 1$) とおくと

$$\begin{cases} f(t)=g(t) \\ f'(t)=g'(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a(t-1)^2(t-4)+6t=6t-12 & \cdots\cdots② \\ a\left\{2(t-1)(t-4)+(t-1)^2\right\}+6=6 & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

③より

$$a(t-1)\{2(t-4)+(t-1)\}=0$$
$$3a(t-1)(t-3)=0$$
$$\therefore\ t=3 \qquad (\because\ t\fallingdotseq 1)$$

②に代入して

$$a\cdot 2^2\cdot(-1)+18=6$$
$$\therefore\ a=3$$

①に代入して

$$\begin{aligned} f(x)&=3(x-1)^2(x-4)+6x \\ &\boldsymbol{=3x^3-18x^2+33x-12} \end{aligned}$$

(c)　(a)(b) と同様に考えて，条件 (i) より

$$f(x)-6x=a(x-1)^3$$
$$\therefore\ f(x)=a(x-1)^3+6x\ \cdots\cdots④$$

と表せる。

よって，

$$f'(x)=3a(x-1)^2+6$$

である。

条件 (ii) より，$f'(-3)=0$ が必要であるから

$$f'(-3)=3a(-4)^2+6=0$$
$$\therefore\ a=-\frac{1}{8}$$

であることが必要である。

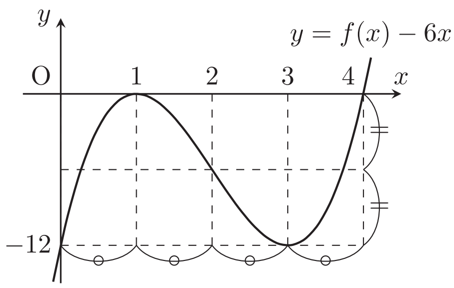
$\left(\text{このとき，} f'(x)=-\frac{3}{8}(x-1)^2+6 \text{ は } x=-3 \text{ の前後で符号を } - \text{ から } + \text{ に変えるので，} x=-3 \text{ で極値となる}\right)$

④に代入して

$$
\begin{aligned}
f(x) &= -\frac{1}{8}(x-1)^3 + 6x \\
&= \boldsymbol{\frac{-1}{8}x^3 + \frac{3}{8}x^2 + \frac{45}{8}x + \frac{1}{8}}
\end{aligned}
$$

注釈

3 次関数のグラフの対称性に関する問題である。(証明は下記注釈)
それを用いると，(b) は次のように解答できる。
条件より，
$y = f(x) - 6x = a(x-1)^2(x-4)$ のグラフは次の図のようになる。



したがって，$y = f(x) - 6x$ は $x = 3$ で極値 -12 をとるから，
$f(3) - 6 \cdot 3 = a(-2)^2 - 12$ から $a = 3$ とわかる。

注釈

例えば 3 次関数のグラフが変曲点に関して点対称になることは，次のように証明できる.

3 次関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \ (a \fallingdotseq 0)$ を考える。$f''(x) = 0$ を満たす x は $x = -\dfrac{b}{3a}$ であり，
$f\left(-\dfrac{b}{3a}\right) = \dfrac{2b^3}{27a^2} - \dfrac{bc}{3a} + d$ であるので，$y = f(x)$ を x 軸方向に $\dfrac{b}{3a}$，y 軸方向に $-\dfrac{2b^3}{27a^2} + \dfrac{bc}{3a} - d$ だけ平行移動すると (変曲点が原点にくるように平行移動すると)，平行移動した関数を $g(x)$ として

$$
\begin{aligned}
g(x) &= a\left(x - \frac{b}{3a}\right)^3 + b\left(x - \frac{b}{3a}\right)^2 + c\left(x - \frac{b}{3a}\right) + d + \left(-\frac{2b^3}{27a^2} + \frac{bc}{3a} - d\right) \\
&= ax^3 + \left(-\frac{b^2}{3a} + c\right)x
\end{aligned}
$$

$g(-x) = -g(x)$ より，$y = g(x)$ のグラフは原点に関して点対称であるから，3 次関数 $y = f(x)$ のグラフは変曲点 $\left(-\dfrac{b}{3a},\ f\left(-\dfrac{b}{3a}\right)\right)$ に関して点対称である.

$\boxed{\text{III}}$

0 以上の整数 n に対して

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n+1} x dx$$

とする。

(1) I_0 を求めよ。

(2) $n \geqq 1$ のとき $I_n = (-1)^n \left(I_0 + \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^m}{2m} \right)$ が成り立つことを数学的帰納法によって示せ。

(3) $\log 2 = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m}$ を示せ。ただし，$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{4}$ において，$0 \leqq \tan x \leqq \frac{4}{\pi} x$ が成り立つことを用いてよい。

$\boxed{\text{解答}}$

(1)

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \ dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-(\cos x)'}{\cos x} dx \\ &= \Big[-\log|\cos x| \Big]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= -\log \frac{1}{\sqrt{2}} + \log 1 \\ &= \frac{1}{2} \log 2 \end{aligned}$$

(2) $n = 1$ のとき，

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x \ dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x \cdot \tan x \ dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) \tan x \ dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x (\tan x)' \ dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \ dx \\ &= \Big[\frac{1}{2} \tan^2 x \Big]_0^{\frac{\pi}{4}} - I_0 \\ &= \frac{1}{2} - I_0 \end{aligned}$$

より $I_1 = (-1)^1 \left\{ I_0 + \frac{(-1)^1}{2} \right\}$ となり題意を満たす。

$n=k$ で題意が成立すると仮定する。$n=k+1$ のとき,

$$\begin{aligned}
I_{k+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2k+3} x\ dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x \cdot \tan^{2k+1} x\ dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) \tan^{2k+1} x\ dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2k+1} x(\tan x)'\ dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2k+1} x\ dx \\
&= \Big[\frac{1}{2k+2} \tan^{2k+2} x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} - I_k \\
&= \frac{1}{2k+2} - (-1)^k \left\{ I_0 + \sum_{m=1}^{k} \frac{(-1)^m}{2m} \right\} \\
&= (-1)^{k+1} \left\{ \frac{(-1)^{k+1}}{2k+2} + I_0 + \sum_{m=1}^{k} \frac{(-1)^m}{2m} \right\} \\
&= (-1)^{k+1} \left\{ I_0 + \sum_{m=1}^{k+1} \frac{(-1)^m}{2m} \right\}
\end{aligned}$$

より題意を満たす。よって数学的帰納法から $n \geqq 1$ のとき

$$I_n = (-1)^n \left\{ I_0 + \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^m}{2m} \right\}$$

である。

(3) 問題文より $0 \leqq \tan x \leqq \dfrac{4}{\pi} x$ であるため, $0 \leqq \tan^{2n+1} x \leqq \left(\dfrac{4}{\pi}\right)^{2n+1} x^{2n+1}$ である。各辺を 0 から $\dfrac{\pi}{4}$ の範囲で積分することで

$$0 \leqq I_n \leqq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{4}{\pi}\right)^{2n+1} x^{2n+1}\ dx$$

を得る。

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{4}{\pi}\right)^{2n+1} x^{2n+1}\ dx &= \Big[\left(\frac{4}{\pi}\right)^{2n+1} \cdot \frac{1}{2n+2} x^{2n+2} \Big]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \left(\frac{4}{\pi}\right)^{2n+1} \cdot \frac{1}{2n+2} \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n+2} \\
&= \frac{1}{2n+2} \cdot \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

であるため,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{4}{\pi}\right)^{2n+1} x^{2n+1}\ dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+2} \cdot \frac{\pi}{4} = 0$$

である。こうしてハサミウチの原理から

$$\lim_{n\to\infty} I_n = 0$$

(2) より $I_n = (-1)^n \left\{ I_0 + \displaystyle\sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^m}{2m} \right\}$ であったため, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left| (-1)^n \left\{ \frac{1}{2} \log 2 + \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^m}{2m} \right\} \right| = 0$ であ

る。以上より

$$\log 2 = -2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m} = -\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m}$$

である。

講評

$\boxed{\text{I}}$ ［(1) 数列，極限，(2) 空間ベクトル，(3) 複素数と方程式，(4) 集合と論証］（易～標準）
：特に難しいところはなく，点数を稼ぎたい。落ち着いて解けたかどうかであろう。必要十分条件を問う問題は目新しかった。

$\boxed{\text{II}}$ ［数Ⅱ微分法］（やや易）
：整関数の微積分に関する出題であった。(a) の誘導が丁寧であるので (b)(c) もそれに従えばよい。(c) は 2008 順天堂大にほぼ同様の出題が見られる。

$\boxed{\text{III}}$ ［数Ⅲ積分法］（標準）
：無限級数に関する典型的な出題であった。誰もが解いたことがあるような問題でしっかりと点数を確保したい。

全体的に平易な出題であったが時間が短いので，どこまで素早く正確にできるかが問われた。一次突破ラインは 70% 程度か。