医学部専門予備校 YMS
医学部進学予備校 メビオ　医学部専門予備校 英進館メビオ 福岡校

解答速報

慶應義塾大学医学部　数学

2025年 2月 9日実施

［ I ］

以下の設問（5）に答え，文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。

(1)　確率変数 Z が標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとき，$0 \leqq Z \leqq u$ となる確率を $p(u)$ で表す。いくつかの u に対する $p(u)$ の値を以下の表にまとめた。

u	0.67	1.00	1.64	1.80	2.00	2.50
$p(u)$	0.2486	0.3413	0.4495	0.4641	0.4772	0.4938

この表を用いて，身長の分布について考察してみよう。
ある年の高校 3 年生女子の身長は，平均 158cm，標準偏差 5cm の正規分布に従うと仮定する。この年の高校 3 年生女子の中で，身長が 153cm 以上 170.5 cm 以下の生徒は約 $\boxed{（あ）}$ % いる。この年の高校 3 年生女子の中で，身長が低い方から 2.5% の中に入る生徒の身長は $\boxed{（い）}$ cm 以下である。ただし，空欄（あ）には小数第 1 位を四捨五入して，整数値を入れ，空欄（い）には当てはまる最も大きい整数値を入れなさい。

(2)　連続型確率変数のとりうる値の範囲が $1 \leqq X \leqq e$ であり，その確率密度関数が $f(x) = rx\log x (1 \leqq x \leqq e)$ で与えられている。ただし，r は定数であり，e は自然対数の底である。このとき，$r = \boxed{（う）}$ である。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin^3\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \boxed{（え）}$ である。

(4)　i を虚数単位とし，方程式 $z^3 = 12(1+\sqrt{3}i)$ の異なる 3 つの解を $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ とする。複素数平面上の 3 点 $\mathrm{A}(\alpha),\ \mathrm{B}(\beta),\ \mathrm{C}(\gamma)$ を頂点とする $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を 3^s と表すと，$s = \boxed{（お）}$ である。ただし，空欄（お）には分数を入れなさい。

(5)　$a,\ b,\ c,\ d$ を整数とし，$c \neq 0$ または $d \neq 0$ とする。$\sqrt{2}$ が無理数であることを用いて，以下の 4 条件

$$a \geqq 0, \quad b \geqq 0, \quad \frac{a\sqrt{2}+b}{c\sqrt{2}+d} = 2\sqrt{2}, \quad ad+bc = 18$$

を満たす組 $(a,\ b,\ c,\ d)$ をすべて求めなさい。ただし，答えだけでなく思考過程も書きなさい。

解答

(1)　身長 153cm は (平均) − (標準偏差) × 1 に，身長 170.5cm は (平均) + (標準偏差) × 2.5 に対応するので，この年の高校 3 年生女子の中で，身長が 153cm 以上 170.5cm 以下の生徒は約

$$\{p(1.00)+p(2.50)\}\times 100 = (0.3413+0.4938)\times 100 = 0.8351\times 100 = 83.51$$

% いる。これを設問の指示に従って小数第一位を四捨五入して整数値にすると，**84** となる。
身長 148cm は（平均）−（標準偏差）×2 に対応するので，この年の高校 3 年生女子の中で，身長が 148cm 以下の生徒は約

$$(0.5-p(2.00))\times 100 = 0.0228\times 100 = 2.28$$

% おり，身長 149cm は 平均 − (標準偏差) × 1.8 に対応するので，この年の高校 3 年生女子の中で，身長が 149cm 以下の生徒は約

$$\{0.5 - p(1.80)\} \times 100 = 0.0359 \times 100 = 3.59$$

% いる。よって，身長がちょうど 148cm だと身長が低い方から 2.5% の中に入り，ちょうど 149cm だと身長が低い方から 2.5% の中に入らないので，求める答えは **148** である。

注釈

問題文を「生徒 X がこの年の高校 3 年生女子の中で身長が低い方から 2.5% の中に入っているならば，生徒 X の身長は必ず (い)cm 以下である」と解釈すると，(い) に入り得る整数は 149 以上の任意の整数となるため，問題文は曖昧であると言わざるを得ない。

(2)　$f(x)$ は確率密度関数であるので，定義より定義域全体で積分すると 1 である。よって

$$\int_1^e rx\log x\ dx = 1 \ \cdots\cdots ①$$

ここで，部分積分を用いて

$$\begin{aligned}\int_1^e x\log x\ dx &= \left[\frac{1}{2}x^2\log x\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x}\ dx\\ &= \frac{1}{2}e^2 - \left(\frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4}\right)\\ &= \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}\end{aligned}$$

であるので，①より

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}\right)r = 1\\ \iff& r = \boldsymbol{\frac{4}{e^2+1}}\end{aligned}$$

である。

(3)　区分求積法より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\ dx$ なので

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \int_0^1 \sin^3\frac{\pi}{2}x\ dx\\ &= \int_0^1 \left(1-\cos^2\frac{\pi}{2}x\right)\sin\frac{\pi}{2}x\ dx \ \cdots\cdots ②\end{aligned}$$

ここで，$t = \cos\dfrac{\pi}{2}x$ とおくと，$dt = -\dfrac{\pi}{2}\sin\dfrac{\pi}{2}x\ dx$ であり，$x: 0 \to 1$ のとき $t: 1 \to 0$ であるので

$$\begin{aligned}② &= \int_1^0 \left\{-\frac{2}{\pi}(1-t^2)\right\}dt\\ &= \boldsymbol{\frac{4}{3\pi}}\end{aligned}$$

(4)　$a = 12(1+\sqrt{3}i)$ とおく。

a の絶対値は 24 であるので，a の偏角を θ とおくと（$0 \leqq \theta < 2\pi$），　$a = 24(\cos\theta + i\sin\theta)$ である。z の絶対値を r，偏角を ϕ とおくと

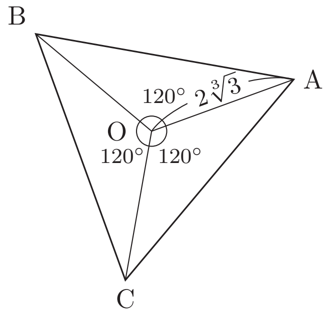
$$z^3 = a$$

$$r^3(\cos 3\phi + i\sin 3\phi) = 24(\cos\theta + i\sin\theta)$$

なので，$r = \sqrt[3]{24} = 2\sqrt[3]{3}$, $\phi = \dfrac{\theta}{3} + 2n\pi$ または $\dfrac{\theta}{3} + \left(2n + \dfrac{2}{3}\right)\pi$ または $\dfrac{\theta}{3} + \left(2n + \dfrac{4}{3}\right)\pi$（$n$ は整数）である。2π の整数倍の差を無視すると z の偏角は 3 通り考えられ，それぞれが点 A, B, C に対応する。よって，複素数平面の原点を O とおくと，OA, OB, OC はどれも $2\sqrt[3]{3}$ で，$\angle$AOB, $\angle$BOC, $\angle$COA はどれも $\dfrac{2}{3}\pi$ なので，$\triangle$ABC の面積は

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{AOB} + \triangle\mathrm{BOC} + \triangle\mathrm{COA} &= \triangle\mathrm{AOB} \times 3\\ &= \frac{1}{2}\mathrm{AO} \times \mathrm{BO} \times \sin\angle\mathrm{AOB} \times 3\\ &= \frac{1}{2} \times 2\sqrt[3]{3} \times 2\sqrt[3]{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 3\\ &= \sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt{3} \times 3\\ &= 3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{2}} \times 3^1\\ &= 3^{\frac{13}{6}}\end{aligned}$$

である。よって，求める答えは $\dfrac{\mathbf{13}}{\mathbf{6}}$ である。



別解

$\triangle$ABC は原点を重心とする正三角形である。1 辺の長さは $2\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot 3^{\frac{5}{6}}$ であるため，面積は $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(2 \cdot 3^{\frac{5}{6}}\right)^2 = 3^{\frac{\mathbf{13}}{\mathbf{6}}}$ である。

(5) $\dfrac{a\sqrt{2} + b}{c\sqrt{2} + d} = 2\sqrt{2}$ および「$c \fallingdotseq 0$ または $d \fallingdotseq 0$」より

$$a\sqrt{2} + b = (c\sqrt{2} + d) \times 2\sqrt{2}$$

$$a\sqrt{2} + b = 2\sqrt{2}d + 4c$$

この式と，$\sqrt{2}$ が無理数であることから $a = 2d$, $b = 4c$ ……③ である。③ と $ad + bc = 18$ より

$$2d^2 + 4c^2 = 18$$

$$d^2 + 2c^2 = 9$$

$$d^2 = 9 - 2c^2 \quad \cdots\cdots④$$

これと $d^2 \geqq 0$ より

$$9 - 2c^2 \geqq 0$$

$$c^2 \leqq \frac{9}{2} \quad \cdots\cdots ⑤$$

③ と $a \geqq 0,\ b \geqq 0$ より，$c \geqq 0,\ d \geqq 0$ である。このことと ⑤ より，c としてありうる値は 0, 1, 2 で，これらの値を ④ に代入する。$d \geqq 0$ に注意して，

$$(c,\ d) = (0,\ 3),\ (1,\ 2\sqrt{2}),\ (2,\ 1)$$

d は整数であるため, $(c,\ d) = (1,\ 2\sqrt{2})$ は不適である。これと ③ より, $(a,\ b,\ c,\ d) =$ **(6, 0, 0, 3), (2, 8, 2, 1)** である。

[Ⅱ]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。ただし，空欄（か)，(そ）には n の式を入れ，それ以外の空欄には数を入れなさい。

袋が１つ，赤玉３個，白球３個が用意されている。赤玉が少なくとも１個袋に入った状態に対して，操作 T の手順を以下のように定める。

> 操作 T
> 袋から玉を１個無作為に取り出し，それが赤玉であれば袋に戻し，白玉であれば袋に戻さない。

n を自然数とする。

(1)　赤玉３個と白玉３個が袋に入った状態から始めて，操作 T を n 回施し終えたとき，袋の中に入っている白玉の個数が３個である確率を a_n, ２個である確率を b_n，３個である確率を c_n とする。このとき，次の関係式

$$\begin{cases} a_{n+1} = \boxed{\text{(あ)}}\,a_n \\ a_{n+1} = \boxed{\text{(い)}}\,a_n + \boxed{\text{(う)}}\,b_n \\ a_{n+1} = \boxed{\text{(え)}}\,b_n + \boxed{\text{(お)}}\,c_n \end{cases}$$

が成り立つ。これより，a_n，b_n，c_n をそれぞれ n の式で表すと

$$a_n = \boxed{\text{(か)}}$$

$$b_n = \boxed{\text{(き)}}\left\{\left(\boxed{\text{(く)}}\right)^n - \left(\boxed{\text{(け)}}\right)^n\right\}$$

$$c_n = \boxed{\text{(こ)}}\left\{\left(\boxed{\text{(さ)}}\right)^{n-1} + \boxed{\text{(し)}}\left(\boxed{\text{す)}}\right)^{n-1} + \left(\boxed{\text{(せ)}}\right)^{n-1}\right\}$$

である。ただし，$\boxed{\text{(さ)}} > \boxed{\text{(せ)}}$ とする。

(2)　赤玉が少なくとも１個袋に入った状態に対して，ゲーム T のルールを以下のように定める。

> ゲーム T
> 操作 T を１回施し，その結果，白玉が３個袋に入っている場合に限り１点を得る。

赤玉３個と白玉３個が袋に入った状態から始めて，ゲーム T を n 回行い終えたとき，１回目から n 回目までに得た点の合計を X_n とし，$Y_n = 2^{X_n}$ と定める。このとき，Y_n の期待値は $\boxed{\text{(そ)}}$ であり，分散は $\boxed{\text{(た)}}\,2^{n-1} + \boxed{\text{(ち)}}\,n^2 + \boxed{\text{(つ)}}\,n + \boxed{\text{(て)}}$ である。

解答

(1)　$n+1$ 回後に袋に白玉が３個入っている (確率 a_{n+1}) のは，

・n 回後に白玉が３個あり (確率 a_n)，$n+1$ 回目の操作で赤玉を取り出す (確率 1/2)

場合なので，

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$$

$n+1$ 回後に袋に白玉が２個入っている (確率 b_{n+1}) のは，

・n 回後に白玉が３個入っていて (確率 a_n)，$n+1$ 回目の操作で白玉を取り出す (確率 1/2)

・n 回後に白玉が２個入っていて (確率 b_n)，$n+1$ 回目の操作で赤玉を取り出す (確率 3/5)

のいずれかの場合なので，

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{3}{5}b_n$$

$n+1$ 回後に袋に白玉が 1 個入っている (確率 c_{n+1}) のは,

・n 回後に白玉が 2 個入っていて (確率 b_n), $n+1$ 回目の操作で白玉を取り出す (確率 2/5)

・n 回後に白玉が 1 個入っていて (確率 c_n), $n+1$ 回目の操作で赤玉を取り出す (確率 3/4)

のいずれかの場合なので,

$$c_{n+1} = \frac{2}{5}b_n + \frac{3}{4}c_n$$

よって,

$$\begin{cases} \boldsymbol{a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n} & \cdots\cdots① \\ \boldsymbol{b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{3}{5}b_n} & \cdots\cdots② \\ \boldsymbol{c_{n+1} = \frac{2}{5}b_n + \frac{3}{4}c_n} & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

$a_1 = \frac{1}{2}$, $b_1 = \frac{1}{2}$, $c_1 = 0$ のもとで漸化式を解く。

①より, $\{a_n\}$ は公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列であるから,

$$a_n = a_1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \boldsymbol{\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

これを②に代入すると

$$b_{n+1} = \frac{3}{5}b_n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

となる。これは

$$b_{n+1} + 5\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{3}{5}\left\{b_n + 5\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

と変形できるので, $\left\{b_n + 5\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ は公比 $\frac{3}{5}$ の等比数列であるから

$$b_n + 5\left(\frac{1}{2}\right)^n = \left\{b_1 + 5\left(\frac{1}{2}\right)\right\}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} = 3\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\ b_n = \boldsymbol{5\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}$$

これを③に代入すると

$$c_{n+1} = \frac{3}{4}c_n + 2\left(\frac{3}{5}\right)^n - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

となる。これは

$$c_{n+1} + \frac{40}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} - 8\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{3}{4}\left\{c_n + \frac{40}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^n - 8\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

と変形できるので, $\left\{c_n + \frac{40}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^n - 8\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ は公比 $\frac{3}{4}$ の等比数列であるから

$$c_n + \frac{40}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^n - 8\left(\frac{1}{2}\right)^n = \left\{c_1 + \frac{40}{3}\left(\frac{1}{2}\right) - 8\left(\frac{1}{2}\right)\right\}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = 4\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$

$$c_n = 4\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} - \frac{40}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^n + 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\therefore\ c_n = \boldsymbol{4\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} - 2\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}$$

(2) X_n のとりうる値は $0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$ であるから,

Y_n のとりうる値は $Y_n = 2^0,\ 2^1,\ 2^2,\ \cdots\cdots,\ 2^n$

である。

さらに，$Y_n = 2^l$ $(k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ となる確率を $P(Y_n = 2^l)$ で表すと

$$P(Y_n = 2^l) = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{2}\right)^l \times \left(\dfrac{1}{2}\right) & (0 \leqq l \leqq n-1 \text{ のとき}) \\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^n & (l = n \text{ のとき}) \end{cases}$$

であるから，Y_n の期待値 $E(Y_n)$ は，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} E(Y_n) &= \sum_{l=0}^{n-1} 2^l \cdot P(Y_n = 2^l) + 2^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \sum_{l=0}^{n-1} 2^l \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{l+1} + 1 \\ &= \sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{2} + 1 = \boldsymbol{\frac{1}{2}n + 1} \end{aligned}$$

また，

$$\begin{aligned} E({Y_n}^2) &= \sum_{l=0}^{n-1} (2^l)^2 \cdot P(Y_n = 2^l) + (2^n)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \sum_{l=0}^{n-1} 2^{2l} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{l+1} + 2^n \\ &= \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{n-1} 2^l + 2^n \\ &= \frac{1}{2}(2^n - 1) + 2^n = 3 \cdot 2^{n-1} - 1 \end{aligned}$$

であるから，

Y_n の分散 $V(Y_n)$ は，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} V(Y_n) &= E({Y_n}^2) - \{E(Y_n)\}^2 \\ &= 3 \cdot 2^{n-1} - 1 - \left(\frac{1}{2}n + 1\right)^2 \\ &= \boldsymbol{3 \cdot 2^{n-1} - \frac{1}{4}n^2 - n - \frac{3}{2}} \end{aligned}$$

[III]

以下の設問（1）（ii）に答え，文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。以下，すべての多項式は，実数を係数とする x についての多項式であるとする。

(1) (i) 3 次式 $P(x)=3x^3-9x^2+7x$ と 2 次式 $Q(x)=2x^2+1$ について，合成関数 $P(Q(x))$ は多項式 $\boxed{\text{(あ)}}$ で表される。

(ii) 多項式の積の展開より，2 つの多項式 $G(x)=a_mx^m+\cdots+a_1x+a_0$ と $H(x)=b_nx^n+\cdots+b_1x+b_0$ の合成関数 $G(H(x))$ は多項式で表される。n が自然数であって $b_n \neq 0$ であるとき，$G(H(x))=0$ が x についての恒等式ならば，$a_m=\cdots=a_0=0$ となることを示しなさい。

(2) $f(x)$ を 0 でない多項式とし，

$$g(x)=\int_0^x f(t)dt, \quad h(x)=\int_x^1 f(t)dt$$

と定める。さらに，$g(1)$ を a と表し，以下の 2 条件が成り立つとする。

● ある定数 $b,\ c,\ d$ が存在して，x についての恒等式

$$g(h(x))-\left(\{h(x)\}^3+b\{g(x)\}^2+ch(x)+d\right)=0$$

が成り立つ。

● 等式 $f(1)=2(1-a)$ が成り立つ。

(3) 以下において (う)，(き)，(く)，(せ) には数を入れ，他の空欄は a を用いて表しなさい。

(i) $g(x)+h(x)=\boxed{\text{(い)}}$ であり，(1)(ii) を用いると，$g(x)$ は $\boxed{\text{(う)}}$ 次式であり，$b=\boxed{\text{(え)}}$，$c=\boxed{\text{(お)}}$，$d=\boxed{\text{(か)}}$ であることがわかる。

(ii) 関数 $g(x)$ が極値をもつための必要十分条件は $a<\boxed{\text{(き)}}$ または $a>\boxed{\text{(く)}}$ である。a がこの条件を満たすとき，$g(x)$ は $x=\boxed{\text{(け)}}$ で極大値 M をとる。また，方程式 $g(x)=M$ の解は $x=\boxed{\text{(け)}}$ と $x=\boxed{\text{(こ)}}$ である。

(iii) 曲線 $y=g(x)$ 上の点 $(a,\ g(a))$ における接線の方程式は，
$y=\boxed{\text{(さ)}}x+\boxed{\text{(し)}}$ である。さらに

$$F(a)=\int_0^a \left\{g(x)-\boxed{\text{(さ)}}x-\boxed{\text{(し)}}-2(x-a)\right\}e^{-\frac{(x-a)^2}{2}}dx$$

と定める。ただし，e は自然対数の底である。このとき，$F(a)=\boxed{\text{(す)}}$ と表され，a の関数 $F(a)$ の最大値は $\boxed{\text{(せ)}}$ である。

解答

(1) (i)

$$P(Q(x))=3(2x^2+1)^3-9(2x^2+1)^2+7(2x^2+1)$$
$$=\mathbf{24x^6-4x^2+1}$$

(ii) $H(x_i)=X_i\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m,\ m+1)$ とおく。
n が自然数，かつ $b_n \neq 0$ より，$X_i\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m,\ m+1)$ はすべて異なる値をとることができる。
ここで，$G(X_1)=G(X_2)=\cdots=G(X_m)=0$ より

$$G(X)=a_mX^m+\cdots+a_1X+a_0$$
$$=A(X-X_1)(X-X_2)\cdots(X-X_m)$$

とかけるので，$G(X_{m+1})=0$ を用いると $A=0$ である。
よって，すべての実数 X に対して

$$G(X)=0,\ \text{すなわち}\ a_mX^m+\cdots+a_1X+a_0=0$$

が成立するので

$$a_m=\cdots=a_1=a_0=0$$

である。

(2) (i) $g(x)+h(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)dt+\int_x^1 f(t)dt=\int_0^1 f(t)dt$ ……① である。

また，$g(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ に $x=1$ を代入すると $g(1)=\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$ ……② である。

よって，①② より $g(x)+f(x)=g(1)=\boldsymbol{a}$ である。

したがって，$h(x)=a-g(x)$ であるので，与えられた恒等式に代入して

$$g(h(x))-\bigl(\{h(x)\}^3+b\{a-h(x)\}^2+ch(x)+d\bigr)=0$$

$$\iff g(h(x))-\bigl(\{h(x)\}^3+b\{h(x)\}^2+\{-2ab+c\}h(x)+a^2b+d\bigr)=0$$

となる。よって，$h(x)$ が定数関数ではないことを用いると (1)(ii) より $g(x)$ は 3 次以上の多項式となり，4 次以上の項の係数はすべて 0 となることより **3** 次式であり，

$g(x)=x^3+bx^2+(-2ab+c)x+a^2b+d$ とかける。

ここで，$g(1)=a,\ g(0)=\displaystyle\int_0^0 f(t)dt=0$ であり，

また，$g(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)dt \Rightarrow g'(x)=f(x)$ より $g'(1)=f(1)=2(1-a)$ である。

$g'(x)=3x^2+2bx+(-2ab+c)$ であることより

$$\begin{cases} g(1)=1+b+(-2ab+c)+a^2b+d=a \\ g(0)=a^2b+d=0 \\ g'(1)=3+2b+(-2ab+c)=2(1-a) \end{cases} \iff \begin{cases} b=\boldsymbol{-3a} \\ c=\boldsymbol{-6a^2+4a-1} \\ d=\boldsymbol{3a^3} \end{cases}$$

なお，このときすべての条件を満たす。

(ii) 関数 $g(x)$ は 3 次関数であるので，

$g(x)$ が極値をもつ $\iff$ $g'(x)=0$ が異なる 2 実数解をもつ

であるので，$g'(x)=3x^2-6ax+4a-1=0$ の判別式を D とすると，求める必要十分条件は

$$D/4>0$$

$$\iff (-3a)^2-3(4a-1)>0$$

$$\iff (3a-1)(a-1)>0$$

$$\iff a<\boldsymbol{\frac{1}{3}},\ \boldsymbol{1}<a$$

このとき，

$$g'(x)=0 \iff x=\frac{3a\pm\sqrt{9a^2-12a+3}}{3}$$

であるので，増減を考えることにより極大値 M をとる x の値は $x=\boldsymbol{\dfrac{3a-\sqrt{9a^2-12a+3}}{3}}$ である。

また，$g(x)=M$ を満たす x の値は，3 次関数の対称性を考慮することにより，$x=\dfrac{3a-\sqrt{9a^2-12a+3}}{3}$

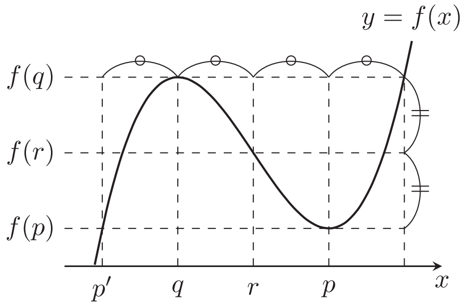
のほか

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{3a+\sqrt{9a^2-12a+3}}{3} + \frac{\frac{3a+\sqrt{9a^2-12a+3}}{3} - \frac{3a-\sqrt{9a^2-12a+3}}{3}}{2} \\
&= \boldsymbol{\frac{3a+2\sqrt{9a^2-12a+3}}{3}}
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{注釈}}$

3 次関数の対称性を用いると楽である。

実際，3 次関数のグラフは次の図のようになる。



例えば 3 次関数のグラフが変曲点に関して点対称になることは，次のように証明できる。

3 次関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a \neq 0)$ を考える。$f''(x)=0$ を満たす x は $x=-\dfrac{b}{3a}$ であり，

$f\left(-\dfrac{b}{3a}\right)=\dfrac{2b^3}{27a^2}-\dfrac{bc}{3a}+d$ であるので，$y=f(x)$ を x 軸方向に $\dfrac{b}{3a}$，y 軸方向に $-\dfrac{2b^3}{27a^2}+\dfrac{bc}{3a}-d$ だけ平行移動すると (変曲点が原点にくるように平行移動すると)，平行移動した後の関数を $g(x)$ として

$$
\begin{aligned}
g(x) &= a\left(x-\frac{b}{3a}\right)^3 + b\left(x-\frac{b}{3a}\right)^2 + c\left(x-\frac{b}{3a}\right) + d + \left(-\frac{2b^3}{27a^2}+\frac{bc}{3a}-d\right) \\
&= ax^3 + \left(-\frac{b^2}{3a}+c\right)x
\end{aligned}
$$

$g(-x)=-g(x)$ より，$y=g(x)$ のグラフは原点に関して点対称であるから，3 次関数 $y=f(x)$ のグラフは変曲点 $\left(-\dfrac{b}{3a},\ f\left(-\dfrac{b}{3a}\right)\right)$ に関して点対称である。

(iii)　曲線 $y=g(x)$ 上の点 $(a,\ g(a))$ における接線の方程式は

$$
\begin{aligned}
y &= g'(a)(x-a)+g(a) \\
&= \boldsymbol{(-3a^2+4a-1)x+a^3}
\end{aligned}
$$

である。したがって

$$
\begin{aligned}
F(a) &= \int_0^a \left\{g(x) - (-3a^2 + 4a - 1)x - a^3 - 2(x-a)\right\} e^{-\frac{(x-a)^2}{2}} dx \\
&= \int_0^a \left\{(x-a)^3 - 2(x-a)\right\} e^{-\frac{(x-a)^2}{2}} dx \\
&\qquad\qquad (\text{点 } (a,\ g(a)) \text{ が変曲点，あるいは接点であることに注目した}) \\
&= \int_{-a}^0 (t^3 - 2t) e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (x - a = t \text{ とした}) \\
&= \int_{-\frac{a^2}{2}}^0 (2s + 2) e^s ds \quad \left(-\frac{t^2}{2} = s \text{ とした}\right) \\
&= \Big[2se^s\Big]_{-\frac{a^2}{2}}^0 \\
&= \boldsymbol{a^2 e^{-\frac{a^2}{2}}}
\end{aligned}
$$

と表される。

また，$F'(a) = -a(a - \sqrt{2})(a + \sqrt{2})e^{-\frac{a^2}{2}}$ から増減を考えることにより，

最大値は $F(\pm\sqrt{2}) = \boldsymbol{\frac{2}{e}}$ である。

[IV]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。

(1) 座標平面において，連立不等式 $0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1$ の表す正方形 S を考える。正方形 S の辺上の異なる 5 点

$$\mathrm{P}_0(0,\ 0),\ \mathrm{P}_1(p_1,\ 1),\ \mathrm{P}_2(1,\ q_2),\ \mathrm{P}_3(p,\ 0),\ \mathrm{P}_4(p_4,\ q_4),$$

は次の条件を満たすとする。$i = 1,\ 2,\ 3$ に対して，点 P_i は正方形 S の頂点でなく，点 P_i を通る正方形 S の辺を線分 $\mathrm{A}_i\mathrm{B}_i$ と表すとき，$\angle \mathrm{P}_{i-1}\mathrm{P}_i\mathrm{A}_i = \angle \mathrm{P}_{i+1}\mathrm{P}_i\mathrm{B}_i$ が成り立つ。ただし，$0° < \angle \mathrm{P}_{i-1}\mathrm{P}_i\mathrm{A}_i < 90°$ とする。

このとき，$p_1 = \boxed{（あ）}$，$q_2 = \boxed{（い）}$ である。さらに，$0 < p \leqq \boxed{（あ）}$ のとき，$(p_4,\ q_4) = (0,\ \boxed{（え）})$ であり，$\boxed{（う）} \leqq p < 1$ のとき $(p_4,\ q_4) = (\boxed{（お）},\ 1)$ である。ただし，（う）には数を入れ，それ以外の上記の空欄は p を用いて表しなさい。

(2) 座標空間において，連立不等式 $0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1,\ 0 \leqq z \leqq 1$ の表す立方体 T を考える。立方体 T の面上の異なる 5 点

$$\mathrm{Q}_0(0,\ 0,\ 0),\ \mathrm{Q}_1(a_1,\ b_1,\ 1),\ \mathrm{Q}_2(a_2,\ 1,\ c_2),\ \mathrm{Q}_3(a,\ b,\ 0),\ \mathrm{Q}_4(a_4,\ b_4,\ c_4)$$

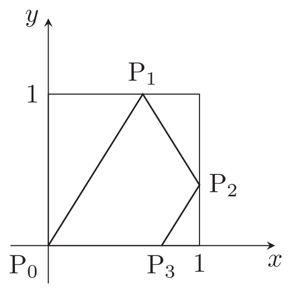
は次の条件を満たすとする。 $i = 1,\ 2,\ 3$ に対して，点 Q_i は立方体 T の頂点でなく，T の辺上にもない。さらに，点 Q_i を含む立方体 T の面は，3 点 Q_{i-1}，Q_i，Q_{i+1} の定める平面と直交し，この 2 つの面が共有する線分を $\mathrm{C}_i\mathrm{D}_i$ と表すとき，$\angle \mathrm{Q}_{i-1}\mathrm{Q}_i\mathrm{C}_i = \angle \mathrm{Q}_{i+1}\mathrm{Q}_i\mathrm{D}_i$ が成り立つ。ただし，$0° < \angle \mathrm{Q}_{i-1}\mathrm{Q}_i\mathrm{C}_i < 90°$ とする。

(i) 2 点 $(0,\ 0,\ 0)$，$(a_1,\ b_1,\ 0)$ を通る直線と平面 $y = 1$ の交点の座標は a_1, b_1 を用いて，$(\boxed{（か）},\ 1,\ 0)$ と表されるので，$a_2 = \boxed{（か）}$ である。

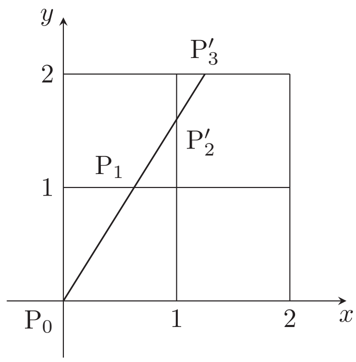
(ii) a，b を用いて $a_1 = \boxed{（き）}$，$b_1 = \boxed{（く）}$，$a_2 = \boxed{（け）}$，$c_2 = \boxed{（こ）}$ と表される。さらに，$a_4 = 1$，$b_4 = 0$ となるための必要十分条件は，$\boxed{（さ）} \leqq a < 1$ かつ $b = \boxed{（し）}$ となることであって，この条件が成り立つならば，$c_4 = \boxed{（す）}$ である。また，$0 < a \leqq \boxed{（さ）}$ かつ $\boxed{（さ）} \leqq b < 1$ であるとき，$(a_4,\ b_4,\ c_4) = \left(\boxed{（せ）},\ \boxed{（そ）},\ 1\right)$ である。ただし，（さ）には数を入れ，（し），（す）は a を用いて，（せ），（そ）は a，b を用いて表しなさい。

$\boxed{\text{解答}}$

(1) P_0，P_1，P_2，P_3 は下図のようになる。



角度の条件（$\angle \mathrm{P}_{i-1}\mathrm{P}_i\mathrm{A}_i = \angle \mathrm{P}_{i+1}\mathrm{P}_i\mathrm{B}_i$）より，折れ線 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$ を $y = 1$ で折り返した後，$\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$ を $x = 1$ で折り返すと，下図のようになる。（なお，P_2，P_3 の最終的な移動先を P_2'，P_3' と置いている。）



折り返しを考慮すると $P_2'(1,\ 2-q_2)$，$P_3'(2-p, 2)$ となる。P_0，P_1，P_2'，P_3' が同一直線上にあることから

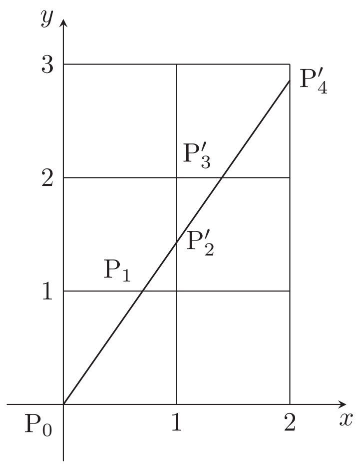
$$\frac{p_1}{1} = \frac{1}{2-q_2} = \frac{2-p}{2}$$

である。以上整理して $p_1 = \boldsymbol{\dfrac{2-p}{2}}$，$q_2 = \boldsymbol{\dfrac{2-2p}{2-p}}$ である。

直線 P_3P_4 についても，P_4 が直線 P_0P_1 上になるよう折り返す。点 P_4 が移った先を $P_4'(p_4',\ q_4')$ とおく。

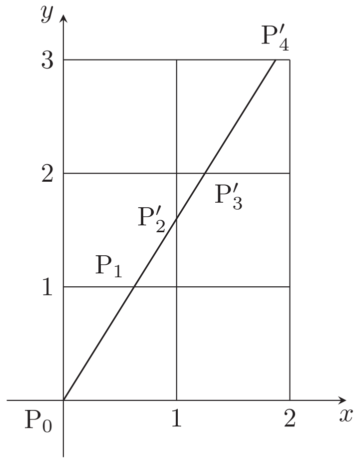
$p_4 = 0$ となるとき，$p_4' = 2$ である。このとき $q_4' \leqq 3$ になる。直線 P_0P_1 の傾きがとり得る値に注目すると $1 < \dfrac{2}{2-p} \leqq \dfrac{3}{2}$ を得る。これを解くと $\boldsymbol{0 < p \leqq \dfrac{2}{3}}$ である。

また，$q_4' = 2 \cdot \dfrac{2}{2-p} = \dfrac{4}{2-p}$ である。折り返しを考えると $q_4 = q_4' - 2 = \boldsymbol{\dfrac{2p}{2-p}}$ である。



$q_4 = 1$ となるとき，$q_4' = 3$ である。このとき $p_4' \leqq 2$ になる。直線 P_0P_1 の傾きがとり得る値に注目すると $\dfrac{3}{2} \leqq \dfrac{2}{2-p} < 2$ を得る。これを解くと $\boldsymbol{\dfrac{2}{3} \leqq p < 1}$ である。

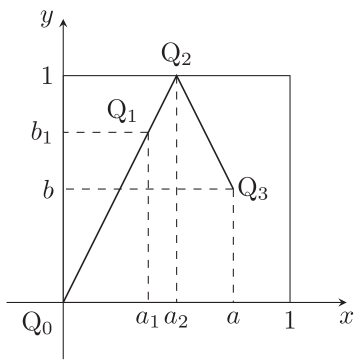
また，$p_4' = 3 \cdot \dfrac{2-p}{2} = \dfrac{6-3p}{2}$ である。折り返しを考えると $p_4 = 2 - p_4' = \boldsymbol{\dfrac{3p-2}{2}}$ である。

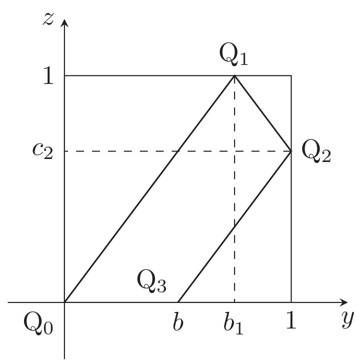


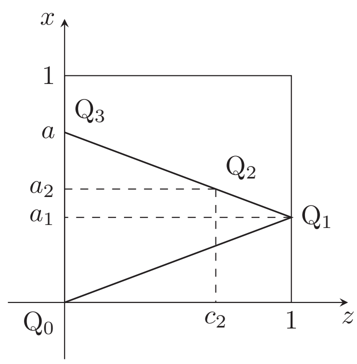
(2) (i) 同一直線上にあることから $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{\boxed{(か)}}{1}$ となるため，求める値は $\boldsymbol{\dfrac{a_1}{b_1}}$ である。

Q_1，Q_2 を xy 平面に射影することで，$a_2 = \boldsymbol{\dfrac{a_1}{b_1}}$ となる。

(ii) 折れ線 $Q_0Q_1Q_2Q_3$ を xy 平面，yz 平面，zx 平面に射影する。このとき，折れ曲がり方は (1) の条件と同様になることに注意する。







zx 平面の射影について，直線 Q_1Q_3 を $z = 1$ で折り返すと下図のようになる。

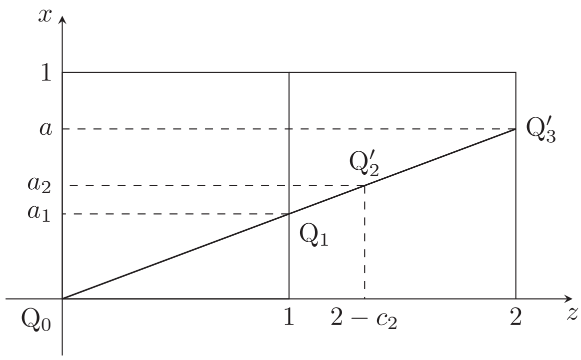


図 1

なお，Q_2，Q_3 の移る先の点を Q'_2，Q'_3 とおいた。Q'_2 の z 座標は折り返しを考えると $1 + (1 - c_2) = 2 - c_2$ となる。

Q_0，Q_1 Q'_2，Q'_3 は同一直線上にあるため

$$\frac{a_1}{1} = \frac{a_2}{2 - c_2} = \frac{a}{2}$$

よって $a_1 = \boldsymbol{\dfrac{a}{2}}$ である。

xy 平面の射影について，直線 Q_1Q_3 を $z = 1$ で折り返すと下図のようになる。

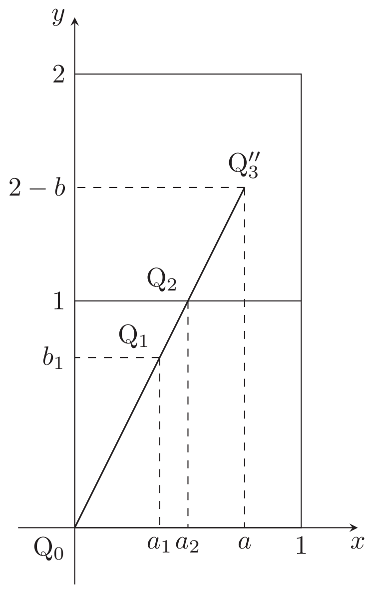


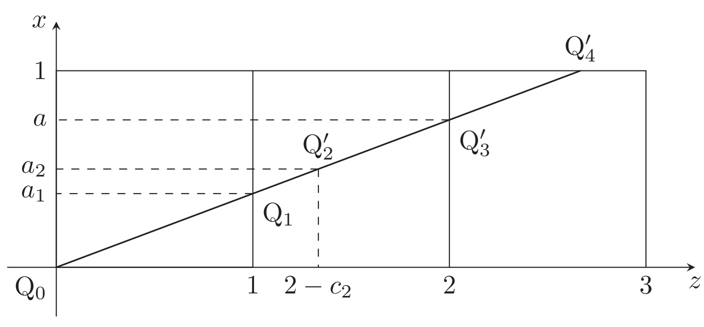
図 2

なお，Q_3 の移る先の点を Q_3'' とおいた。Q_3'' の y 座標は折り返しを考えると $1+(1-b)=2-b$ となる。
Q_0，Q_1 Q_2，Q_3'' は同一直線上にあるため

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{1}=\frac{a}{2-b}$$

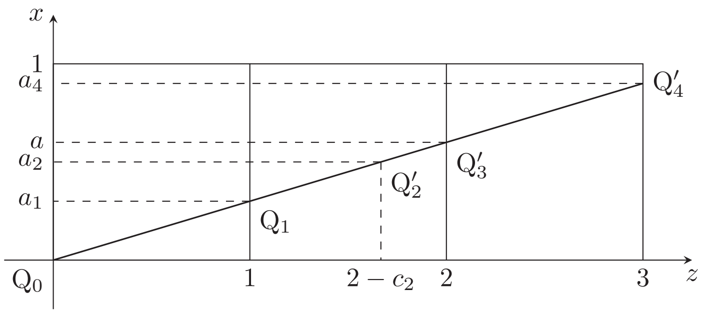
よって $b_1=\dfrac{2-b}{a}\cdot a_1=\dfrac{2-b}{a}\cdot\dfrac{a}{2}=\boldsymbol{\dfrac{2-b}{2}}$ である。また $a_2=\boldsymbol{\dfrac{a}{2-b}}$ である。
また，$\dfrac{a_2}{2-c_2}=\dfrac{a}{2}$ であったため，$2-c_2=\dfrac{2}{a}\cdot a_2=\dfrac{2}{2-b}$ である。よって $c_2=2-\dfrac{2}{2-b}=\boldsymbol{\dfrac{2-2b}{2-b}}$ である。

$a_4=1$，$b_4=0$ となる場合，図 2 の直線 Q_0Q_3'' は $(1,\ 2)$ を通る。このとき $a_2=\dfrac{1}{2}$，つまり $\dfrac{a}{2-b}=\dfrac{1}{2}$ となる。整理して $b=\boldsymbol{2-2a}$ である。
Q_4 の x 座標が 1 であることから，図 1 に Q_4 を移動して得られる点 Q_4' を追加すると下図のようになる。



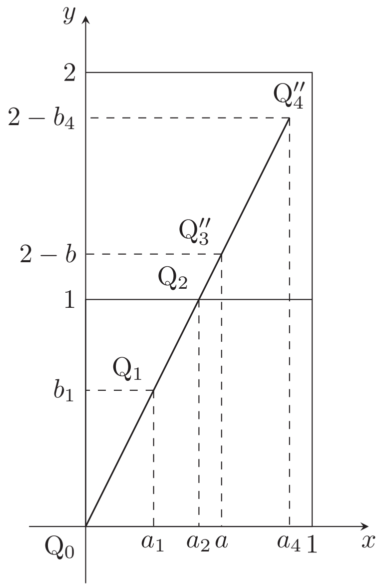
直線 Q_0Q_1 の傾きに注目すると $\dfrac{1}{3}\leqq\dfrac{a_1}{1}<\dfrac{1}{2}$ を得る。$a_1=\dfrac{a}{2}$ を代入して整理することで $\boldsymbol{\dfrac{2}{3}\leqq a<1}$ となる。
Q_4' の z 座標は折り返しを考えると $2+c_4$ である。Q_0，Q_1，Q_4' が同一直線上にあることから $\dfrac{a_1}{1}=\dfrac{1}{2+c_4}$ である。これを整理すると $c_4=\dfrac{1}{a_1}-2=\boldsymbol{\dfrac{2}{a}-2}$ を得る。

$0<a\leqq\dfrac{2}{3}$ の場合，図 1 は次のようになる。



Q_0, Q'_3, Q'_4 が同一直線上にあることから $\dfrac{a_4}{3}=\dfrac{a}{2}$ である。よって $a_4=\dfrac{3}{2}a$ である。

図 2 は次のようになる。



再び Q_0, Q''_3, Q''_4 が同一直線上にあることから $\dfrac{a_4}{2-b_4}=\dfrac{a}{2-b}$ である。

よって $2-b_4=\dfrac{2-b}{a}\cdot a_4=\dfrac{3}{2}(2-b)$, つまり $b_4=2-\dfrac{3}{2}(2-b)=\dfrac{3}{2}b-1$ である。

以上より $(a_4,\ b_4,\ c_4)=\left(\boldsymbol{\dfrac{3}{2}a,\ \dfrac{3}{2}b-1,\ 1}\right)$ である。

講評

［I］［小問集合］（やや易）
(1)(2) 確率分布，(3) 区分求積法，(4) 複素数平面，(5) 数と式からの出題であった。本学としては全体的に易しい内容であった。確率分布は内容として易しいが分野として押さえられていたかどうかが問われる。

［II］［確率，数列］（標準）
基本的な確率漸化式の出題であった。期待値も出題もあり，大問 1 とともに新課程が意識されている内容であった。細かい点には注意したい。

［III］［式と証明，微積分］（やや難）
前半は恒等式に関する出題，後半は微積分に関する内容であった。前半は条件をしっかりと読みながらとき計算する必要がある。前半ができれば後半の難易度は易しい。

［IV］［平面図形，空間図形］（難）
反射に関する出題であった。後半は各平面への射影ができると解きやすいが時間内にやり切るのは相当厳しいのではないか。前半の平面図形を確実に得点したい。

　昨年度に比べ難化した。特に大問 3，4 はやりにくい問題が多く，大問 1，2 でどれだけ得点できるかが勝負になるだろう。一次突破ラインは 50～55% 程度か。