解答速報

日本大学医学部 N方式（1期）　数学

2025年 2月 1日実施

I

(1)　ϕ は空集合を表すものとする。集合 A, B が，$A=\{x|-x-5 \leqq -3x+1 < 3-x\}$，$A\cap B=\phi$，$A\cup B=\{x|x^2-7x-8<0\}$ を満たすとき，$B=\{x|\boxed{\ 1\ } < x < \boxed{\ 2\ }\}$ である。

(2)　関数 $f(x)=x^2-2ax+a+1$ の最小値を m とする。a がすべての実数値をとって変化するとき，m の最大値は $\dfrac{\boxed{\ 3\ }}{\boxed{\ 4\ }}$ である。

(3)　30^{30} は $\boxed{\ 5\ }\boxed{\ 6\ }$ 桁の整数である。ただし，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

(4)　i を虚数単位とする。

$$\frac{(\sqrt{3}+3i)^2}{1+i}=\boxed{\ 7\ }\sqrt{\boxed{\ 8\ }}\left(\cos\frac{\boxed{\ 9\ }}{\boxed{10}\boxed{11}}\pi+i\sin\frac{\boxed{\ 9\ }}{\boxed{10}\boxed{11}}\pi\right)$$ である。

(5)　$0<\alpha<\pi$，$0<\beta<\pi$，$\tan\alpha=\dfrac{3}{7}$，$\tan\beta=\dfrac{2}{5}$ のとき，$\alpha+\beta=\dfrac{\boxed{12}}{\boxed{13}}\pi$ である。

解答

(1)　$-x-5 \leqq -3x+1$ を解くと $x \leqq 3$，$-3x+1<3-x$ を解くと $x>-1$ であるため $A=\{x\mid -1<x\leqq 3\}$ である。

$x^2-7x-8=(x-8)(x+1)$ より $A\cup B=\{x\mid -1<x<8\}$ である。いま，$A\cap B=\phi$ であるため，B は $A\cup B$ から A の補集合を取り除いたものであるため，$B=\boldsymbol{\{x\mid 3<x<8\}}$ である。

(1)　$f(x)=(x-a)^2-a^2+a+1$ より $f(x)$ の最小値は $-a^2+a+1$ である。$m=-a^2+a+1=-\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{5}{4}$ より，m は $a=\dfrac{1}{2}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{\dfrac{5}{4}}$ をとる。

(3)　$\log_{10}30^{30}=30\log_{10}30=30(\log_{10}10+\log_{10}3)=3-(1+\log_{10}3)=30+30\times 0.4771=44.313$ である。よって $10^{44}<30^{30}<10^{45}$ より 30^{30} は **45** 桁の整数。

(4)　$\sqrt{3}+3i=2\sqrt{3}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$，

$1+i=\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ であるため，

$$\begin{aligned}\frac{(\sqrt{3}+3i)^2}{1+i}&=\frac{12\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}\\&=\boldsymbol{6\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{12}\pi+i\sin\frac{5}{12}\pi\right)}\end{aligned}$$

(5)　$\tan\alpha, \tan\beta > 0$ より $\alpha, \beta < \dfrac{\pi}{2}$ である。

$$\begin{aligned}\tan(\alpha+\beta) &= \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\\ &= \frac{\frac{3}{7}+\frac{2}{5}}{1-\frac{3}{7}\times\frac{2}{5}}\\ &= \frac{29}{29}\\ &= 1\end{aligned}$$

である。$0 < \alpha+\beta < \pi$ より $\alpha+\beta = \boldsymbol{\dfrac{\pi}{4}}$ となる。

Ⅱ

赤玉が 3 個，青玉が 4 個，白玉が 5 個入った袋から 2 個の玉を同時に取り出す。

(1) 取り出した 2 個の玉の色が異なる確率は $\dfrac{\boxed{14}\ \boxed{15}}{\boxed{16}\ \boxed{17}}$ である。

(2) 取り出した 2 個の玉の色が異なるとき，そのうち 1 個が赤玉である条件付き確率は $\dfrac{\boxed{18}\ \boxed{19}}{\boxed{20}\ \boxed{21}}$ である。

解答

(1) 取り出し方の総数は ${}_{12}\mathrm{C}_2 = 66$ 通り。取り出した 2 個の玉の色が異なる取り方は,

- 赤と青：12 通り
- 青と白：20 通り
- 白と赤：15 通り

で合計 47 通りであるため，求める値は $\dfrac{\mathbf{47}}{\mathbf{66}}$ である。

(2) (1) より $\dfrac{12+15}{12+20+15} = \dfrac{\mathbf{27}}{\mathbf{47}}$ である。

III

t を実数とする。$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| = 3$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| = 2$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 3$ である $\triangle\mathrm{OAB}$ において，頂点 O から辺 AB に下ろした垂線と辺 AB の交点を H とし，AH：HB $= t : (1-t)$ とする。

(1)　$t = \dfrac{\boxed{22}}{\boxed{23}}$ である。

(2)　$\triangle\mathrm{OAB}$ の垂心を P とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{\boxed{24}}{\boxed{25}}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \dfrac{\boxed{26}}{\boxed{27}}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ である。

解答

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と表される。OH と AB は直交するため $\overrightarrow{\mathrm{OH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0$ である。一方

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} &= -(1-t)\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2 + \{(1-t)-t\}\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} + t\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2 \\ &= 9t - 9 + 3 - 6t + 4t \\ &= 7t - 6\end{aligned}$$

であるため $t = \mathbf{\dfrac{6}{7}}$ である。

(2)　点 P は直線 OH 上にあるため，実数 s を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ と表される。H は垂心であるため，AH と OB は直交する。ゆえに $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 0$ である。一方，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} &= \left(s\overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} \\ &= \left\{\left(\frac{s}{7} - 1\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{6}{7}s\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right\} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} \\ &= \left(\frac{s}{7} - 1\right) \cdot 3 + \frac{6}{7}s \cdot 4 \\ &= \frac{27}{7}s - 3\end{aligned}$$

であるため，$s = 3 \cdot \dfrac{7}{27} = \dfrac{7}{9}$ である。こうして

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{7}{9}\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \mathbf{\frac{1}{9}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}}$$

IV

t を正の定数とする。O を原点とする座標平面上に 2 つの曲線 $C_1 : y = 2^{x+1}$, $C_2 : y = 4^x$ および，直線 $l : x = t$ があり，l と C_1, C_2 の交点をそれぞれ A，B とするとき，AB = 9999 である。

(1) $2^t = \boxed{28}\ \boxed{29}\ \boxed{30}$ である。

(2) C_1, C_2 および l で囲まれた図形を D とする。ただし，D は境界線を含むものとする。ここで，$2^{\boxed{31}} < \boxed{28}\ \boxed{29}\ \boxed{30} < 2^{\boxed{31}+1}$ だから，D に含まれる格子点の座標を $(p,\ q)$ とするとき，p のとりうる値の範囲は $\boxed{32} \leqq p \leqq \boxed{31}$ である。ただし，格子点とは x 座標と y 座標がともに整数の点のことである。

(3) (2) で定めた図形 D に含まれる格子点は $\boxed{33}\ \boxed{34}\ \boxed{35}\ \boxed{36}$ 個である。

解答

(1) $0 < x \leqq 1$ では，$2 < 2^{x+1} \leqq 4$, $1 < 4^x \leqq 4$ より，この範囲で差が 9999 になることはない。よって $t > 1$ としてよい。

$x > 1$ において，$4^x = 2^{2x} = 2^{x+x} > 2^{x+1}$ であるため，$4^t - 2^{t+1} = 9999$ である。

$2^t = s$ とおくと，方程式は $s^2 - 2s - 9999 = 0$ と変形される。この解は $s = 101, -99$ である。$s = 2^t > 0$ より $s = -99$ となる t は存在しない。よって $2^t = \mathbf{101}$ である。

(2) $2^6 = 64$, $2^7 = 127$ より $\mathbf{2^6} < 101 < 2^7$ である。一方，$4^x = 2^{x+1}$ の解は $x = 1$ であるため，p のとり得る範囲は $\mathbf{1 \leqq \boldsymbol{p} \leqq 6}$ である。

(3) $x = p$ 上の図形 D に含まれる格子点の個数は $4^p - 2^{p+1} + 1$ であるため

$$\begin{aligned}
\sum_{p=1}^{6}(4^p - 2\cdot 2^p + 1) &= \frac{4^6 - 1}{4 - 1}\cdot 4 - 2\cdot\frac{2^6 - 1}{2 - 1}\cdot 2 + 6 \\
&= \frac{4095}{3}\cdot 4 - 2\cdot 63\cdot 2 + 6 \\
&= 5460 - 252 + 6 \\
&= \mathbf{5214}
\end{aligned}$$

V

a を正の定数とする。O を原点とする座標平面上に直線 $l: y=(\sqrt{3}-1)x$ があり，直線 $x=a$ と x 軸，l との交点をそれぞれ A_0，B_0 とする。線分 OA_0 上に点 A_1，線分 OB_0 上に点 B_1，線分 A_0B_0 上に点 C_1 を四角形 $A_0A_1B_1C_1$ が正方形となるようにとる。同様に，負でない整数 k を用いて，線分 OA_k 上に点 A_{k+1}，線分 OB_k 上に点 B_{k+1}，線分 A_kB_k 上に点 C_{k+1} を四角形 $A_kA_{k+1}B_{k+1}C_{k+1}$ が正方形になるようにとる。正方形 $A_kA_{k+1}B_{k+1}C_{k+1}$ の面積を S_k とし，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} S_k = T_n$ とする。

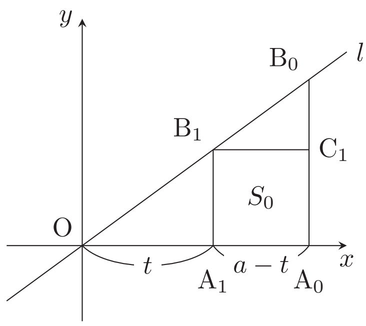
(1) 点 A_1 の x 座標は $\dfrac{\sqrt{\boxed{37}}}{\boxed{38}}a$ である。

(2) $\dfrac{T_7}{T_3} = \dfrac{\boxed{39}\,\boxed{40}}{\boxed{41}\,\boxed{42}}$ である。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} T_n = 1$ となるのは $a = \dfrac{\sqrt{\boxed{43}}+\sqrt{\boxed{44}}}{\boxed{45}}$ のときである。(ただし，$\boxed{43} > \boxed{44}$ とする)

解答

(1) A_1 の x 座標を t とする。



B_1 は $y=(\sqrt{3}-1)x$ 上にあるため，$\dfrac{OA_1}{A_1B_1} = \dfrac{1}{\sqrt{3}-1}$ である。一方 $OA_1 = t$，四角形 $A_0A_1B_1C_1$ が正方形であることから $A_1B_1 = A_0A_1 = a-t$ である。

よって $\dfrac{t}{a-t} = \dfrac{1}{\sqrt{3}-1}$ である。整理することで $t = \dfrac{a}{\sqrt{3}} = \dfrac{\boldsymbol{\sqrt{3}}}{\mathbf{3}}a$ となる。

(2) A_n の x 座標を t_n とおく。(1) と同様にすることで $t_{n+1} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}t_n$ となる。よって $t_n = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^k a$ である。

また，

$$
\begin{aligned}
S_n &= (t_n - t_{n+1})^2 \\
&= \left(t_n - \frac{1}{\sqrt{3}}t_n\right)^2 \\
&= \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{3}{t_n}^2 \\
&= \frac{1}{3^{n+1}}(\sqrt{3}-1)^2a^2
\end{aligned}
$$

である。こうして

$$\frac{T_7}{T_3} = \frac{S_0+S_1+S_2+S_3+S_4+S_5+S_6+S_7}{S_0+S_1+S_2+S_3}$$

$$= \frac{(S_0+S_1+S_2+S_3)+\dfrac{1}{3^4}(S_0+S_1+S_2+S_3)}{S_0+S_1+S_2+S_3}$$
$$= \mathbf{\frac{82}{81}}$$

である。

(3)　T_n を計算する。

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^{k+1}}(\sqrt{3}-1)^2 a^2$$
$$= \frac{1}{3}(\sqrt{3}-1)^2 a^2 \times \frac{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\dfrac{1}{3}}$$
$$= \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)^2 a^2 \left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right\}$$

であるため,

$$\lim_{n\to\infty} T_n = \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)^2 a^2$$

である。これが 1 となるのは，$a^2 = \dfrac{2}{(\sqrt{3}-1)^2}$ のとき，つまり

$$a = \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{2}$$
$$= \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}}$$

VI

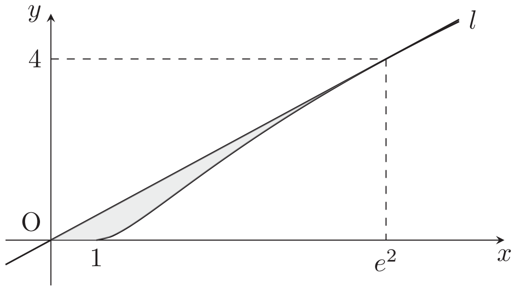
関数 $f(x)=(\log x)^2$ がある。O を原点とする座標平面上において，O から曲線 $y=f(x)$ に引いた接線のうち傾きが正のものを l とし，曲線 $y=f(x)$ と直線 l の接点を P とする。また，曲線 $y=f(x)$ の $x \geqq 1$ の部分と，線分 OP および x 軸で囲まれた図形を D とする。ただし，log は自然対数とし，e はその底とする。

(1)　点 P の座標は $\left(e^{\boxed{46}},\ \boxed{47}\right)$ である。

(2)　D の面積は $\boxed{48}$ であり，D を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積は $\left(\dfrac{\boxed{49}}{\boxed{50}}e^{\boxed{51}}+\dfrac{\boxed{52}}{\boxed{53}}\right)\pi$ である。

解答

(1)　点 P の x 座標を p とする。$f'(x)=\dfrac{2\log x}{x}$ であるため，l の式は $y=\dfrac{2\log p}{p}x-2\log p+(\log p)^2$ である。これは $(0,\ 0)$ を通るため，$0=-2\log p+(\log p)^2$ であるため，$\log p=0,\ 2$ である。
l の傾きが正であるため $\log p=0$ の場合は不適。よって $p=e^2$ で，P $\boldsymbol{(e^2,\ 4)}$ である。



(2)　面積は

$$\frac{1}{2}\cdot e^2\cdot 4-\int_1^{e^2}(\log x)^2dx=2e^2-\Big[x(\log x)^2\Big]_1^{e^2}+\int_1^{e^2}x\cdot\frac{2\log x}{x}dx$$
$$=2e^2-4e^2+2\Big[x\log x-x\Big]_1^{e^2}$$
$$=-2e^2+2e^2+2$$
$$=\mathbf{2}$$

体積を計算する。$y=(\log x)^2$ より $dy=\dfrac{2\log x}{x}dx$ に注意すると

$$\int_0^4\pi x^2dy-\frac{1}{3}\cdot\pi(e^2)^2\cdot 4=\int_1^{e^2}\pi x^2\frac{2\log x}{x}dx-\frac{4}{3}\pi e^4$$
$$=2\pi\int_1^{e^2}x\log x dx-\frac{4}{3}\pi e^4$$
$$=2\pi\Big[\frac{1}{2}x^2\log x\Big]_1^{e^2}-2\pi\int_1^{e^2}\frac{1}{2}xdx-\frac{4}{3}\pi e^4$$
$$=2\pi e^4-2\pi\Big[\frac{1}{4}x^2\Big]_1^{e^2}-\frac{4}{3}\pi e^4$$
$$=2\pi e^4-\frac{1}{2}\pi e^4+\frac{1}{2}\pi-\frac{4}{3}\pi e^4$$
$$=\boldsymbol{\left(\frac{1}{6}e^4+\frac{1}{2}\right)\pi}$$

講評

Ⅰ［小問集合］(易)：集合，二次関数，対数，複素数平面，三角関数からの基本問題の出題である。全て落とさず得点したい。

Ⅱ［確率］（易）：非常に基本的な問題である。落とさず得点したい。

Ⅲ［ベクトル］（易）：垂心の位置ベクトルを求める基本問題である。落とさず得点したい。

Ⅳ［指数関数，整数］（標準）：指数関数と格子点に関する問題。(2) までは得点したい。

Ⅴ［数列，極限］（標準）：問題文をよく読み，図の設定を間違えないようにすることが重要な問題であった。計算自体は多くないため，落とさず得点したい。

Ⅵ［数Ⅲ微積分］（標準）：回転体の体積に関する問題。y 軸回転をさせるときの立式をうまくできるかがポイントであった。

昨年度に比べて，難易度は上がった。格子点に関する問題や，図形を y 軸回転させる問題など，差が付きやすそうな出題が今年度は見られた。1 次突破ボーダーは他の科目にもよるが 80% 程度か。