医学部専門予備校 YMS

医学部進学予備校 メビオ　医学部専門予備校 英進館メビオ 福岡校

解答速報

日本大学医学部 N方式（1期）二次試験　数学

2025年 2月 11日実施

［ I ］

つぎの定積分の値を求めなさい。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{2}(x+|x|+2)^2dx$

(2) $\displaystyle\int_{1}^{\log 2} e^{2x}dx$

(3) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 x dx$

(4) $\displaystyle\int_{0}^{3} \frac{dx}{x^2+9}$

$\boxed{\text{解答}}$

(1)

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{2}(x+|x|+2)^2dx &= \int_{-1}^{0}(x-x+2)^2dx+\int_{0}^{2}(x+x+2)^2dx \\
&= \int_{-1}^{0} 4\ dx + 4\int_{0}^{2}(x+1)^2dx \\
&= \Big[4x\Big]_{-1}^{0} + 4\left[\frac{(x+1)^3}{3}\right]_{0}^{2} \\
&= 4+\frac{4}{3}(27-1) \\
&= \mathbf{\frac{116}{3}}
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
\int_{1}^{\log 2} e^{2x}dx &= \left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_{1}^{\log 2} \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{2\log 2}-e^2\right) \\
&= \boldsymbol{\frac{4-e^2}{2}}
\end{aligned}
$$

(3)

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1-\cos 2x}{2} dx$$
$$= \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$
$$= \boldsymbol{\frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}}$$

(4)　$x = 3\tan\theta$ と置換する。x と θ の対応は，$x : 0 \to 3$ のとき $\theta : 0 \to \dfrac{\pi}{4}$ であるから

$$\int_0^3 \frac{1}{x^2+9} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{9\left(1+\tan^2\theta\right)} \cdot \frac{3}{\cos^2\theta} d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3} d\theta \quad \left(\because 1+\tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}\right)$$
$$= \frac{1}{3}\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$= \boldsymbol{\frac{\pi}{12}}$$

[Ⅱ]

k を定数とし，2 つの曲線

$$y = 2x + k \quad \cdots\cdots ①$$

$$y = \sqrt{x} \quad (x \geqq 0) \quad \cdots\cdots ②$$

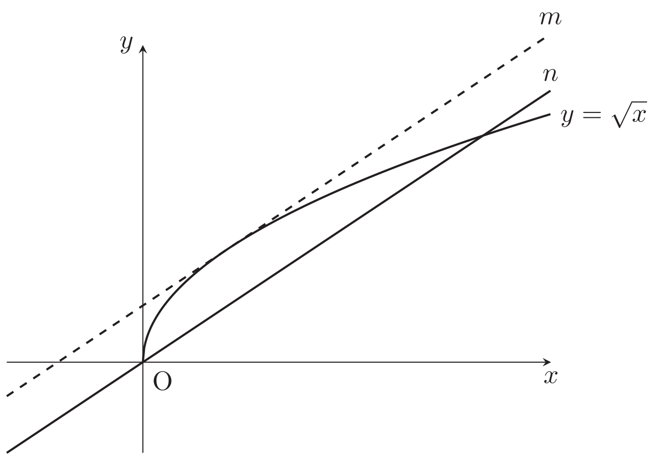
を考える。以下の問いに答えなさい。

(1)　曲線①と②の異なる共有点の個数が 2 個であるような定数 k のとり得る値の範囲を求めなさい。

(2)　k が (1) で求めた範囲にあるとき，曲線①と②の共有点の x 座標を α，β とする。ただし，$\alpha < \beta$ とする。曲線②と 2 つの直線 $x = \alpha$，$x = \beta$ および y 軸で囲まれる図形を x 軸の回りに 1 回転させてできる回転体の体積を $V(k)$ で表すとき，$V(k)$ を k を用いて表しなさい。

解答

(1)



曲線①と②の共有点の個数が 2 個となるのは，

直線①が図の直線 m，n の間にあるときである (破線は含まず，実線は含む)。

直線①と曲線②が接するのは

$$2x + k = \sqrt{x}$$

$$(2x + k)^2 = x$$

$$4x^2 + (4k - 1)x + k^2 = 0 \quad \cdots\cdots ③$$

が $x > 0$ に重解をもつときであり

$$(\text{判別式})D = (4k - 1)^2 - 16k^2 = 0 \text{ かつ } 4k - 1 < 0$$

$$\therefore \ k = \frac{1}{8} \quad \cdots\cdots ④$$

よって，図を考慮して，求める k の範囲は

$$\boldsymbol{0 \leqq k < \frac{1}{8}}$$

(2)　k が④の範囲にあるとき，α，β は③の解であるから

$$\alpha = \frac{1 - 4k - \sqrt{1 - 8k}}{8}, \ \beta = \frac{1 - 4k + \sqrt{1 - 8k}}{8}$$

である。

求める回転体の体積は

$$
\begin{aligned}
V(k) &= \int_{\alpha}^{\beta} \pi(\sqrt{x})^2 dx \\
&= \pi \int_{\alpha}^{\beta} x\ dx \\
&= \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_{\alpha}^{\beta} \\
&= \frac{\pi}{2}(\beta^2 - \alpha^2) \\
&= \frac{\pi}{2}(\beta + \alpha)(\beta - \alpha) \\
&= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1-4k}{4} \cdot \frac{\sqrt{1-8k}}{4} \\
&= \boldsymbol{\frac{(1-4k)\sqrt{1-8k}}{32}\pi}
\end{aligned}
$$

[III]

関数 $f(x)$ は

$$\int_0^x f(t)dt = \log(x + \sqrt{1+x^2})$$

を満たすとする。以下の問いに答えなさい。

(1)　$f(x)$ を求めなさい。

(2)　$x \geqq 0$ とする。$y = f(x)$ の変曲点の x 座標を x_0 で表すとき，x_0 の値と定積分 $\displaystyle\int_0^{x_0} f(x)dx$ を求めなさい。

(3)　曲線 $y = f(x)$，$(0 \leqq x \leqq x_0)$，x 軸，y 軸および直線 $x = x_0$ で囲まれる部分を y 軸の回りに 1 回転させてできる回転体の体積を求めなさい。ただし，x_0 は (2) で求めた値とする。

解答

(1)　$\displaystyle\int_0^x f(t)dt = \log(x + \sqrt{1+x^2})$ の両辺を x で微分して

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{(x + \sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}} \end{aligned}$$

(2)　(1) より

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1+x^2}(1+x^2)},\ f''(x) = \frac{(\sqrt{2}x+1)(\sqrt{2}x-1)}{(1+x^2)^2}$$

であるので，$x \geqq 0$ における増減は次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$
$f'(x)$	0	$-$		$-$
$f''(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$		$\searrow$

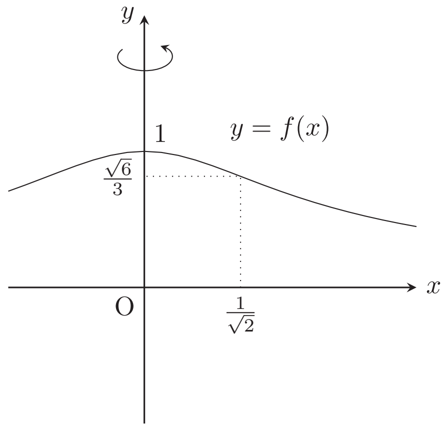
よって，$x_0 = \boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$ である。

また，(1) より $\{\log(x + \sqrt{1+x^2})\}' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ であるので

$$\begin{aligned} \int_0^{x_0} f(x)dx &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx \\ &= \Big[\log(x + \sqrt{1+x^2})\Big]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\ &= \boldsymbol{\log\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}} \end{aligned}$$

(3)　求める体積を V とする。図より

$$
\begin{aligned}
V &= \pi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\frac{\sqrt{6}}{3}+\int_{\frac{\sqrt{6}}{3}}^{1}\pi x^2dy \\
&= \frac{\sqrt{6}}{6}\pi+\pi\int_{\frac{\sqrt{6}}{3}}^{1}\left(\frac{1}{y^2}-1\right)dy \\
&= \frac{\sqrt{6}}{6}\pi+\pi\Big[-\frac{1}{y}-y\Big]_{\frac{\sqrt{6}}{3}}^{1} \\
&= \boldsymbol{(\sqrt{6}-2)\pi}
\end{aligned}
$$



$\boxed{\text{注釈}}$

バウムクーヘン分割を用いると

$$
\begin{aligned}
V &= 2\pi\int_0^{x_0}x\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx \\
&= 2\pi\Big[\sqrt{1+x^2}\Big]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\
&= \boldsymbol{(\sqrt{6}-2)\pi}
\end{aligned}
$$

講評

［ Ⅰ ］［小問集合 (積分法)］(易) ：基本的な積分計算からの出題であった。どれも基本的でここで絶対に落とすことはできない。

［ Ⅱ ］［関数，数Ⅲ積分法］（やや易）：無理関数のグラフと直線に関する出題であった。特に難儀するところはないだろう。

［ Ⅲ ］［数Ⅲ微積分］（標準）：積分方程式によって決まる関数に関する出題であった。複合的な内容であるがどれも入試基礎レベルの内容なのでしっかりと得点したい。

昨年度と比べて同程度であった。満点を目指したい内容であるが，2 完半あたりが合格ラインか。