医学部専門予備校 YMS
医学部進学予備校 メビオ　医学部専門予備校 英進館メビオ 福岡校

# 解答速報

# 日本医科大学（前期）　数学

2025年 2月 1日実施

［I］

1 から 6 の目をもつ 1 つのさいころがある。 $i$ を虚数単位とするとき，複素数平面上の点 $z$ が $z_0=1$ から出発して，さいころを 1 回投げるごとに，次の規則に従って動く。

(規則) 「4 以下の目が出たら現在の点に対応する複素数に $\sqrt{2}i$ を掛け， 5 または 6 の目が出たら $1+i$ で割る。このようにして得られる複素数に対応する点を新たな点 $z$ とする。」

$n$ を 1 以上の整数とし，さいころを $n$ 回投げたとき，4 以下の目が $k$ $(k=0,\ 1,\ 2,\cdots,\ n)$ 回出る確率を $P_{n,\ k}$ とし，この場合の点 $z$ に対応する複素数を $z_{n,\ k}$ と表すとき，以下の空欄に適する 1 以上の整数を求めよ。

(1)　確率 $P_{n,\ k}$ は二項係数 ${}_n\mathrm{C}_k$ 用いて

$$P_{n,\ k}={}_n\mathrm{C}_k\frac{\boxed{\text{ア}}^{\,k}}{\boxed{\text{イ}}^{\,n}}$$

と表せる。また複素数 $z_{n,\ k}$ は

$$z_{n,\ k}=\boxed{\text{ウ}}^{\frac{\boxed{\text{エ}}^{\,k-n}}{\boxed{\text{オ}}}}\left\{\cos\left(\frac{\boxed{\text{カ}}k-n}{\boxed{\text{キ}}}\pi\right)+i\sin\left(\frac{\boxed{\text{カ}}k-n}{\boxed{\text{キ}}}\pi\right)\right\}$$

となる。

(2)　確率 $P_{2025,\ k}$ は $k=\boxed{\text{ク}}$ のとき，最大値をとる。

(3)　複素数 $z_{2025,\ k}$ が純虚数となる $k$ は $\boxed{\text{ケ}}$ 個ある。

解答

問 1　$P_{n,\ k}$ は，さいころを $n$ 回投げて，1〜4 の目がちょうど $k$ 回出る確率であるから

$$P_{n,\ k}={}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{4}{6}\right)^k\left(\frac{2}{6}\right)^{n-k}=\boldsymbol{{}_n\mathrm{C}_k\frac{2^k}{3^n}}$$

また，$z_{n,\ k}$ はこのときの点 $z$ に対応する複素数なので

$$\begin{aligned}z_{n,\ k}&=z_0\times\frac{(\sqrt{2}i)^k}{(1+i)^{n-k}}\\&=1\cdot\frac{\left\{\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})\right\}^k}{\left\{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right\}^{n-k}}\\&=\boldsymbol{2^{\frac{2k-n}{2}}\left\{\cos\left(\frac{3k-n}{4}\pi\right)+i\sin\left(\frac{3k-n}{4}\pi\right)\right\}}\end{aligned}$$

問 2　$0 \leqq k \leqq n-1$ のとき

$$\begin{aligned}\frac{P_{n,\ k+1}}{P_{n,\ k}} &= \frac{{}_n\mathrm{C}_{k+1}\cdot 2^{k+1}}{3^n}\times\frac{3^n}{{}_n\mathrm{C}_k\cdot 2^k}\\ &= \frac{n!}{(k+1)!\{n-(k-1)\}!}\cdot\frac{k!(n-k)!}{n!}\cdot 2\\ &= \frac{2(n-k)}{k+1}\end{aligned}$$

であるから，$n=2025$ のとき

$$\frac{P_{2025,\ k+1}}{P_{2025,\ k}}>1 \iff \frac{2(2025-k)}{k+1}>1 \iff k<\frac{4049}{3}\ (=1349.\cdots)$$

すなわち，$0 \leqq k \leqq 1349$ である。

したがって，

$$\begin{cases} 0 \leqq k \leqq 1349 \text{ のとき } \dfrac{P_{2025,\ k+1}}{P_{2025,\ k}}>1 & \therefore\ P_{2025,\ k}<P_{2025,\ k+1} \\ 1350 \leqq k \leqq 2024 \text{ のとき } \dfrac{P_{2025,\ k+1}}{P_{2025,\ k}}<1 & \therefore\ P_{2025,\ k}>P_{2025,\ k+1} \end{cases}$$

であるから，

$P_{2025,\ 0}<P_{2025,\ 1}<\cdots<P_{2025,\ 1349}<P_{2025,\ 1350}>P_{2025,\ 1351}>\cdots>P_{2025,\ 2024}>P_{2025,\ 2025}$

とわかるので，

$P_{2025,\ k}$ は $\boldsymbol{k=1350}$ のとき，最大値をとる。

問 3　$z_{n,\ k}=2^{\frac{2k-n}{2}}\left\{\cos\left(\dfrac{3k-n}{4}\pi\right)+i\sin\left(\dfrac{3k-n}{4}\pi\right)\right\}$ が純虚数となるのは

$$\frac{3k-n}{4}\pi=\frac{\pi}{2}+m\pi \qquad (m \text{ は整数})$$

$$3k-n=4m+2$$

のときである。

$n=2025$ のとき

$$3k-2025=4m+2$$

$$3k-4m=2027$$

$$3(k+2027)-4(m+2027)=0$$

$$3(k+2027)=4(m+2027)$$

3 と 4 は互いに素であるから，

$$k=4l-2027,\ m=3l-2027 \quad (l \text{ は整数})$$

である。

$0 \leqq k \leqq 2025$ を満たすのは

$$0 \leqq 4l-2027 \leqq 2025$$

$$\frac{2027}{4} \leqq l \leqq \frac{4052}{4}$$

のときであり，$l$ は整数だから

$$507 \leqq l \leqq 1013$$

のときとわかる。これを満たす整数 $l$ は 507 個ある。

したがって，求める $k$ の個数は **507 個** ある。

［Ⅱ］

O を原点とする座標空間において，四面体 OABC は $\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{AB}=1$，$\mathrm{AC}=2$，$\mathrm{OC}=\mathrm{BC}=\sqrt{3}$ を満たす。$0<x<1$ を満たす実数 $x$ に対し，線分 OA を $x:(1-x)$ に内分する点を D とする。点 O から平面 ABC に垂線 OH を下ろす。また，三角形 ABC の内心を I とし，三角形 DHI の面積を $S$ とする。$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおくとき，以下の各問いに答えよ。

問 1　空欄に適する数を求めよ。答えのみでよい。

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\boxed{\text{ア}},\ \vec{b}\cdot\vec{c}=\boxed{\text{イ}},\ \vec{c}\cdot\vec{a}=\boxed{\text{ウ}}$$

問 2　空欄に適する数を求めよ。答えのみでよい。

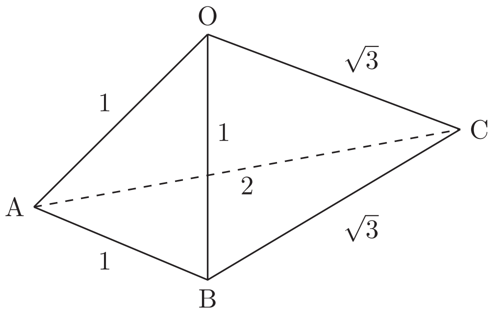
$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\boxed{\text{エ}}\vec{a}+\boxed{\text{オ}}\vec{b}+\boxed{\text{カ}}\vec{c}$$

問 3　空欄に適する数を求めよ。答えのみでよい。

$$\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\boxed{\text{キ}}\vec{a}+\boxed{\text{ク}}\vec{b}+\boxed{\text{ケ}}\vec{c}$$

問 4　$S=\dfrac{\sqrt{2}}{24}$ のとき，$x$ の値を求めよ。導出過程も記せ。

解答




問 1　$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot1\cdot\cos 60^\circ=\mathbf{\dfrac{1}{2}}$

$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2=3$ から $|\vec{c}-\vec{b}|^2=3$ であるので $3-2\vec{b}\cdot\vec{c}+1=3$　　$\therefore\ \vec{b}\cdot\vec{c}=\mathbf{\dfrac{1}{2}}$

$\triangle$OAC において $\mathrm{AC}^2=\mathrm{OA}^2+\mathrm{OC}^2$ が成り立つから，$\angle\mathrm{AOC}=90^\circ$　　$\therefore\ \vec{c}\cdot\vec{a}=\mathbf{0}$

問 2　点 H は平面 ABC 上にあるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\vec{a}+t\vec{b}+(1-s-t)\vec{c}\quad(s,\ t\ \text{は実数})$$

とおける。

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp$ 平面 ABC から，$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}} & \cdots\cdots ① \\ \overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}} & \cdots\cdots ②\end{cases}$

①より，$\{s\vec{a}+t\vec{b}+(1-s-t)\vec{c}\}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$

$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=1$，$|\vec{c}|=\sqrt{3}$ と問 1 の結果から

$\dfrac{1}{2}s-s+t-\dfrac{1}{2}t+\dfrac{1}{2}(1-s-t)=0$　　$\therefore\ s=\dfrac{1}{2}$　$\cdots\cdots ③$

②より，$\{s\vec{a}+t\vec{b}+(1-s-t)\vec{c}\}\cdot(\vec{c}-\vec{a})=0$

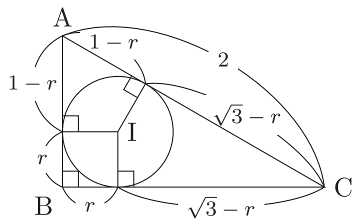
同様に

$-s+\dfrac{1}{2}t-\dfrac{1}{2}t+3(1-s-t)=0$　　$\therefore\ 4s+3t=3$　$\cdots\cdots ④$

③ ④より，$s=\dfrac{1}{2}$，$t=\dfrac{1}{3}$

したがって，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{6}\vec{c}}$

問 3　△ABC に着目する。




図より，内接円の半径 $r$ は $(1-r)+(\sqrt{3}-r)=2$ を満たすので $r=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

よって，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AI}}&=\frac{1-r}{1}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{r}{\sqrt{3}}\overrightarrow{\mathrm{BC}}\\&=\frac{3-\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{3-\sqrt{3}}{6}\overrightarrow{\mathrm{BC}}\end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OI}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AI}}\\&=\vec{a}+\frac{3-\sqrt{3}}{2}(\vec{b}-\vec{a})+\frac{3-\sqrt{3}}{6}(\vec{c}-\vec{a})\\&=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}-1}{2}\vec{a}+\frac{3-\sqrt{3}}{3}\vec{b}+\frac{3-\sqrt{3}}{6}\vec{c}}\end{aligned}$$

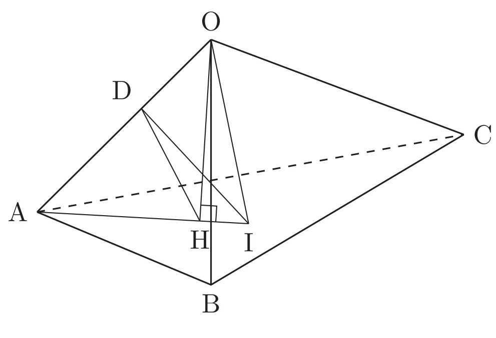
問 4

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AH}}&=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\&=\frac{1}{6}\left(3\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}\right)-\vec{a}\\&=\frac{1}{6}\left(-3\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}\right)\end{aligned}$$

であり，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AI}}&=\overrightarrow{\mathrm{OI}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\&=\frac{3-\sqrt{3}}{6}\left(\sqrt{3}\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}\right)-\vec{a}\\&=\frac{3-\sqrt{3}}{6}\left(-3\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}\right)\\&=(3-\sqrt{3})\overrightarrow{\mathrm{AH}}\end{aligned}$$

であるから，3 点 A，I，H は同一直線上にある。



したがって，点 O，A，H，D，I は同一平面上にあるので，

$$S = \triangle\mathrm{DHI} = \triangle\mathrm{OHI} \times (1 - x) \ \cdots\cdots (*)$$

である。
ここで，

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right|^2 &= \frac{1}{6}\left|3\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right|^2 \\ &= \frac{1}{6^2}(9+4+3+6+2+0) = \frac{2}{3} \\ \left|\overrightarrow{\mathrm{HI}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{AI}} - \overrightarrow{\mathrm{AH}}\right| &= \left|(3-\sqrt{3})\overrightarrow{\mathrm{AH}} - \overrightarrow{\mathrm{AH}}\right| \\ &= (2-\sqrt{3})\left|\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right| \\ &= (2-\sqrt{3})\left|\frac{1}{6}(-3\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})\right| \\ &= (2-\sqrt{3}) \cdot \frac{1}{6}\sqrt{9+4+3-6+2} \\ &= \frac{2\sqrt{3}-3}{3}\end{aligned}$$

であるから，
$(*)$ に代入して，$S = \dfrac{\sqrt{2}}{24}$ を用いると

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{HI}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right| \cdot (1-x) \\ \frac{\sqrt{2}}{24} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}-3}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(1-x) \\ \therefore\ x &= \boldsymbol{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}\end{aligned}$$

[III]

O を原点とする座標空間内において，点 P は $xy$ 平面内の曲線 $x = 2y^2$ 上を動き，点 Q は $zx$ 平面内の曲線 $x = 2z^2$ 上を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ によって定められる動点 R の集合を $S$ とする。点 A$(1,\ 3,\ 4)$ とするとき，以下の各問いの空欄に適する数値あるいは数式を求めよ。問 4 については導出過程も記せ。

問 1　正の定数 $k$ に対して，平面 $x = k$ と $S$ の共通部分は，平面 $x = k$ 内の点 $\left(k,\ \boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イ}}\right)$ を中心とし，半径 $\boxed{\text{ウ}}$ の円となる。

問 2　点 A から $x$ 軸に下ろした垂線を AH とするとき，線分 AH の長さは $\boxed{\text{エ}}$ となる。

問 3　点 A を平面 $x = 1$ 内の点 $(1,\ 0,\ 0)$ を中心として $x$ 軸の周りに回転して $xy$ 平面上 に移す。このような点のうちで $y$ 座標が正となるものを B とすると，点 B の座標は $\left(\boxed{\text{オ}},\ \boxed{\text{カ}},\ \boxed{\text{キ}}\right)$ となる。

問 4　集合 $S$ 上で点 X を動かすとき，$|\overrightarrow{\mathrm{AX}}|$ は X の座標が $\left(\boxed{\text{ク}},\ \boxed{\text{ケ}},\ \boxed{\text{コ}}\right)$ のとき，最小値 $\boxed{\text{サ}}$ をとる。

解答

問 1　実数 $t,\ s$ を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{pmatrix} 2t^2 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \begin{pmatrix} 2s^2 \\ 0 \\ s \end{pmatrix}$ と表されるため，$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \begin{pmatrix} 2t^2 + 2s^2 \\ t \\ s \end{pmatrix}$ と表される。

$x = k$ のとき，$2t^2 + 2s^2 = k$ である。ここに $y = t,\ z = s$ を代入し，整理すると $y^2 + z^2 = \dfrac{k}{2}$ を得る。よって，平面 $x = k$ と $S$ の共通部分は，$\boldsymbol{(k,\ 0,\ 0)}$ を中心とし，半径 $\boldsymbol{\sqrt{\dfrac{k}{2}}}$ の円である。

問 2　H $(1,\ 0,\ 0)$ であるため，$\mathrm{AH} = \sqrt{(1-1)^2 + (3-0)^2 + (4-0)^2} = \mathbf{5}$。

問 3　正の実数 $u$ を用いて，B $(1,\ u,\ 0)$ と表される。$\mathrm{BH} = \sqrt{(1-1)^2 + (u-0)^2} = u$ である。また，点 A と点 B は $x$ 軸から等距離にあるため，$\mathrm{BH} = \mathrm{AH} = 5$ を得る。こうして $u = 5$，つまり B $\boldsymbol{(1,\ 5,\ 0)}$ である。

問 4　$S$ は $x$ 軸を中心に点対称であるため，点 A の代わりに点 B を用いて最小値を計算してよい。

点 Y を $S$ 上の点とする。B が $xy$ 平面上にあることから，$\left|\overrightarrow{\mathrm{BY}}\right|$ が最小となる点 Y は $xy$ 平面上にある。(→注釈)

以下 Y $(2t^2,\ t,\ 0)$ とおいて議論する。

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{BY}}\right|^2 = (2t^2 - 1)^2 + (t - 5)^2 = 4t^4 - 3t^2 - 10t + 26$$

右辺を $f(t)$ とおく。

$$f'(t) = 16t^3 - 6t - 10 = 2(t-1)(8t^2 + 8t + 5)$$

で，$8t^2 + 8t + 5 = 8\left(t + \dfrac{1}{2}\right)^2 + 3 > 0$ に注意すると，増減表は

| $t$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(t)$ | $\searrow$ | | $\nearrow$ |

となり，$t = 1$ のときに $f(t)$ は最小値 17 をとる。よって，$\left|\overrightarrow{\mathrm{BY}}\right|$ は Y $(2,\ 1,\ 0)$ のとき，最小値は $\sqrt{17}$ をとる。

点 A を点 B に移す回転を点 X に適用した場合，点 X は点 Y に移る。よって，点 Y に対して，点 B を点 A に移す回転を適用すればよい。これは $(1,\ 5,\ 0)$ が $(1,\ 3,\ 4)$ に移る回転であるため，$(2,\ 1,\ 0)$ は $\left(2,\ \dfrac{3}{5},\dfrac{4}{5}\right)$ に移る。

以上より $\left|\overrightarrow{\mathrm{AX}}\right|$ は X $\boldsymbol{\left(2,\ \dfrac{3}{5},\ \dfrac{4}{5}\right)}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{\sqrt{17}}$ をとる。

$\boxed{\text{注釈}}$

$|\mathrm{BY}|$ が最小となる Y は $xy$ 平面上にあることを計算により確かめてみよう。
問 1 より実数 $s,\ t$ を用いて Y $(2s^2+2t^2,\ t,\ s)$ と表される。

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{BY}}\right|^2 &= (2s^2+2t^2-1)^2+(t-5)^2+s^2\\ &= 4s^4+\{4(2t^2-1)^2+1\}s^2+(2t^2-1)^2+(t-5)^2\\ &= 4\left\{s^2+\frac{4(2t^2-1)^2+1}{8}\right\}^2-\frac{\{4(2t^2-1)^2+1\}^2}{16}+(2t^2-1)^2+(t-5)^2\end{aligned}$$

と変形できる。今，$4(2t^2-1)^2+1>0$ であるため，$s^2=-\dfrac{4(2t^2-1)^2+1}{8}$ となることはないため，$\left|\overrightarrow{\mathrm{BY}}\right|$ が最小になる $s$ は 0 である。
このことは B の $z$ 成分が 0 であること（すなわち B が $xy$ 平面上にあること）から，$s$ の 1 次の項が現れないことがポイントである。

[Ⅳ]

以下の各問いに答えよ。

問 1　全ての実数 $x$ に対して定義された関数 $a(x)$ に対して，関数 $b(x)$，$c(x)$ を次で定める。

$$b(x)=\frac{1}{2}\{a(x)+a(-x)\},\ c(x)=\frac{1}{2}\{a(x)-a(-x)\}$$

このとき，$b(x)$ は $x$ の偶関数，$c(x)$ は $x$ の奇関数，となることをそれぞれ示せ。

問 2　全ての実数 $x$ に対して定義された連続関数 $f(x)$ は次の条件（i)，(ii）を満たすものとする。

（i）　$f(0)=2$

（ii）　$f(x+h)+\displaystyle\int_x^{x+h} g(t)f(t)dt=f(x)$ が全ての実数 $x$，$h$ に対して成り立つ。

ただし，$g(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}+\dfrac{\sin x}{3+\cos x}$ である。

このとき，以下の (1) ～ (3) の各問いに答えよ。

（1）　関数 $f(x)$ は微分可能であることを示し，$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を，$f(x)$ と $g(x)$ を用いて表せ。

（2）（ii）で与えた関数 $g(x)$ の原始関数 $G(x)$ で $G(0)=0$ を満たすものを求めよ。答えのみでよい。

（3）（2）の $G(x)$ に対して関数 $h(x)$ を $h(x)=e^{G(x)}f(x)$ で定めるとき，$h(x)$ の導関数 $h'(x)$ を計算することにより $f(x)$ を求めよ。

問 3　問 2 で求めた関数 $f(x)$ に対して，次の定積分の値を求めよ。

$$I=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

解答

問 1

$$\begin{aligned} b(-x)&=\frac{1}{2}\{a(-x)+a(x)\}\\ &=b(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c(-x)&=\frac{1}{2}\{a(-x)-a(x)\}\\ &=-c(x) \end{aligned}$$

となるので，$b(x)$ は $x$ の偶関数，$c(x)$ は $x$ の奇関数となる。

問 2 (1)　導関数の定義に従うと

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\ =&\lim_{x\to 0}-\frac{\displaystyle\int_x^{x+h} g(t)f(t)dt}{h} \quad (\because \text{条件 (ii)})\\ =&\lim_{x\to 0}-\frac{\Big[H(t)\Big]_x^{x+h}}{h} \quad (\because g(t)h(t) \text{ の原始関数を } H(t) \text{ とした})\\ =&\lim_{x\to 0}-\frac{H(x+h)-H(x)}{h}\\ =&-H'(x)=-f(x)g(x) \end{aligned}$$

よって，$f(x)$ は微分可能であり，$f'(x)=\boldsymbol{-f(x)g(x)}$ である。

(2)　条件 (ii) より

$$\begin{aligned} G(x) &= \int g(x)dx \\ &= \int \left( \frac{e^x}{1+e^x} + \frac{\sin x}{3+\cos x} \right) dx \\ &= \int \left( \frac{(1+e^x)'}{1+e^x} - \frac{(3+\cos x)'}{3+\cos x} \right) dx \\ &= \log \left| \frac{1+e^x}{3+\cos x} \right| + C \quad (C \text{ は積分定数}) \end{aligned}$$

$G(0)=0$ より，$C=\log 2$

よって

$$G(x) = \mathbf{log}\, \boldsymbol{\frac{2(1+e^x)}{3+\cos x}}$$

(3)　$h(x) = e^{G(x)} f(x)$ より

$$\begin{aligned} h'(x) &= (e^{G(x)})' f(x) + e^{G(x)} f'(x) \\ &= e^{G(x)} G'(x) f(x) + e^{G(x)} f'(x) \\ &= e^{G(x)} g(x) f(x) + e^{G(x)} f'(x) \\ &= -e^{G(x)} f'(x) + e^{G(x)} f'(x) \quad (\because (1)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

よって，$h(x) = C'$ ($C'$は積分定数) であり，$h(x) = e^{G(x)} f(x)$ より

$$e^{G(x)} f(x) = C' \iff f(x) = \frac{C'}{e^{G(x)}} \left( = \frac{C'(3+\cos x)}{2(1+e^x)} \right)$$

条件 (i) より $f(0)=2$ であるので，$C'=2$

よって

$$f(x) = \boldsymbol{\frac{3+\cos x}{1+e^x}}$$

注釈

$h(x)$ の誘導がなくても $f(x)$ の微分方程式は解ける。

(1) より，$\dfrac{f'(x)}{f(x)} = -g(x)$ であるので両辺積分して，$\log|f(x)| = -G(x) + C''$ ($C''$は積分定数)

したがって，$f(x) = \pm e^{C''} \cdot e^{-G(x)}$ であるから，$\pm e^{C''} = C'''$ とすると，$f(x) = C''' e^{-G(x)} = \dfrac{C'''(3+\cos x)}{2(1+e^x)}$

あとは解答同様である。

問 3　問 1 の利用を考えて，$f(x)$ を次のように変形する。

$$f(x) = \frac{1}{2}\{f(x)+f(-x)\} + \frac{1}{2}\{f(x)-f(-x)\}$$

したがって

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\{f(x)+f(-x)\}dx + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\left\{f(x)-f(-x)\right\}dx \\
&= 2\int_0^{\pi} \frac{1}{2}\left\{f(x)+f(-x)\right\}dx + 0 \quad (\because (1)) \\
&= \int_0^{\pi} \left\{\frac{3+\cos x}{1+e^x} + \frac{3+\cos(-x)}{1+e^{-x}}\right\}dx \\
&= \int_0^{\pi} \left\{\frac{3+\cos x}{1+e^x} + \frac{e^x(3+\cos x)}{1+e^x}\right\}dx \\
&= \int_0^{\pi} (3+\cos x)dx \\
&= \Big[3x+\sin x\Big]_0^{\pi} \\
&= 3\pi
\end{aligned}
$$

注釈

有名な題材であり，経験があれば次のように置換して解いてもよい。

$$
\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \frac{3+\cos x}{1+e^x}dx &= \int_0^{\pi} \frac{3+\cos x}{1+e^x}dx + \int_{-\pi}^{0} \frac{3+\cos x}{1+e^x}dx \\
&= \int_0^{\pi} \frac{3+\cos x}{1+e^x}dx + \int_{\pi}^{0} \frac{3+\cos(-x)}{1+e^{-x}}(-dx) \quad (\text{第 2 項で } x=-x \text{ と置換した}) \\
&= \int_0^{\pi} \frac{3}{1+e^x}dx + \int_0^{\pi} \frac{e^x(3+\cos x)}{1+e^x}dx \\
&= \int_0^{\pi} \frac{(1+e^x)(3+\cos x)}{1+e^x}dx = \int_0^{\pi}(3+\cos x)dx = 3\pi
\end{aligned}
$$

## 講評

［Ⅰ］［確率，複素数平面］（やや易）：反復試行の確率とその増減，複素数が純虚数となる条件に関する問題であった。定石通り解くことのできる典型問題。

［Ⅱ］［空間ベクトル］（やや難）：空間ベクトルに関する問題であった。問 4 は 4 点 O，A，H，I が同一平面上にあることに気づかないと計算が面倒である。

［Ⅲ］［空間座標］（標準）：空間座標からの出題であった。誘導も丁寧である。最後は色々な計算方法が考えられる。

［Ⅳ］［数Ⅲ積分法］（やや難）：関数方程式からの出題であった。誘導が丁寧であり，計算量も本学にしては控えめである。経験があれば十分に対応できるだろう。

昨年度と比べて全体的に易化した。計算量が減り，だいぶ取り組みやすくなったのではないだろうか。一次突破ラインは 65% 程度か。