解答速報

日本医科大学（後期）　数学

2025年 2月 28日実施

[I]

中が見える番号付きの 3 つの箱，箱 1，箱 2，箱 3 の中に，それぞれ白球が 1 個ずつ入っている。また，箱の外に，白球，黒球がそれぞれ十分多くある。1 から 6 の目をもつ 1 つのさいころを 1 回投げて出た目を n とするとき，出た目に応じて以下の操作を行う。

(i)　$n=1,\ 2,\ 3$ の場合，箱 n の中に白球が入っている場合には，その 1 つの白球を箱の外にある 1 つの黒球と入れかえる。ただし，箱 n の中に黒球か入っている場合には何も操作をし ない。

(ii)　$n=4,\ 5$ の場合，箱 1，箱 2，箱 3 のいずれかの中に黒球が入っている場合には，黒球が入っているすべての箱に対し，その 1 つの黒球を箱の外にある 1 つの白球と入れかえる。 ただし，箱の中に入っている球がすべて白球である場合には何も操作をしない。

(iii)　$n=6$ の場合，箱 1，箱 2，箱 3 のいずれかの中に白球が入っている場合には，白球が入っているすべての箱に対し，その 1 つの白球を箱の外にある 1 つの黒球と入れかえる。 ただし，箱の中に入っている球がすべて黒球である場合には何も操作をしない。

さいころを 3 回投げたとき，以下の各問いの空欄に適する 1 以上の整数を求めよ。ただし，分数は既約分数で答えること。

問 1　箱 1，箱 2，箱 3 の中に入っている球がすべて白球である確率は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ となる。

問 2　箱 1，箱 2 の中に入っている球が共に黒球であり，箱 3 の中に入っている球が白球である確率は $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ となる。

問 3　箱 1 の中に入っている球が黒球であり，箱 2，箱 3 の中に入っている球が共に白球である確率は $\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ となる。

問 4　箱 1 の中に入っている球が黒球であるという条件のもとで，箱 3 の中に入っている球が白球である確率は $\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ となる。

$\boxed{\text{解答}}$

4, 5, 6 が出ると「リセット」が行われ，それ以前に何が出たかは無意味になることを考えると，最後に出た目から逆に考えるとよさそうである。最後に 4, 5, 6 が出たのがいつか，出たとしたら「4 か 5」と 6 のどちらが出たかを考えると，次の A から G の 7 パターンに場合分けできる。

A　1 回目 1〜3, 2 回目 1〜3, 3 回目 1〜3

B　1 回目 4 か 5, 2 回目 1〜3, 3 回目 1〜3

C　1 回目 6, 2 回目 1〜3, 3 回目 1〜3（このパターンの場合，最終的にはすべての箱に黒球が入っている。）

D　1 回目 1〜6, 2 回目 4 か 5, 3 回目 1〜3

E　1 回目 1〜6, 2 回目 6, 3 回目 1〜3（このパターンの場合，最終的にはすべての箱に黒球が入っている。）

F　1 回目 1〜6, 2 回目 1〜6, 3 回目 4 か 5（このパターンの場合，最終的にはすべての箱に白球が入っている。）
G　1 回目 1〜6, 2 回目 1〜6, 3 回目 6（このパターンの場合，最終的にはすべての箱に黒球が入っている。）

(1)　最終的にはすべての箱に白球が入っているための条件は，さいころの出た目がパターン F に従うことで，そうなる確率は

$$\frac{2}{6} = \boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

である。

(2)　最終的に箱 1，2 に黒球，箱 3 に白球が入っていることがありうるのは，パターン A と B の場合である。
　パターン A になり，かつ最終的に箱 1，2 に黒球，箱 3 に白球が入っているようなさいころの目の出方は，3 回すべて 1 か 2 が出るが，3 回とも同じ目が出るわけではないような出方なので

$$2^3 - 1 - 1 = 6$$

通りであり，パターン B になり，かつ最終的に箱 1，2 に黒球，箱 3 に白球が入っているようなさいころの目の出方は，1 回目に 4 か 5 が出て，2 回目と 3 回目では 1 と 2 が 1 回ずつ出るような目の出方なので

$$2 \times 2 = 4$$

通りである。以上のことから，求める答えは

$$\frac{6+4}{6^3} = \boldsymbol{\frac{5}{108}}$$

である。

(3)　最終的に箱 1 に黒球，箱 2，3 に白球が入っていることがありうるのは，パターン A と B と D の場合である。
　パターン A になり，かつ最終的に箱 1 に黒球，箱 2，3 に白球が入っているようなさいころの目の出方は，3 回とも 1 が出るような出方なので 1 通りであり，
　パターン B になり，かつ最終的に箱 1 に黒球，箱 2，3 に白球が入っているようなさいころの目の出方は，1 回目に 4 か 5 が出て，2 回目と 3 回目では両方とも 1 が出るような目の出方なので 2 通りであり，
　パターン D になり，かつ最終的に箱 1 に黒球，箱 2，3 に白球が入っているようなさいころの目の出方は，2 回目に 4 か 5 が出て，3 回目に 1 が出るような目の出方なので

$$6 \times 2 = 12$$

通りである。以上のことから，求める答えは

$$\frac{1+2+12}{6^3} = \boldsymbol{\frac{5}{72}}$$

である。

(4)　まず，最終的に箱 1 に黒球が入っている確率を求める。
　最終的に箱 1，2 に黒球，箱 3 に白球が入っているようなさいころの目の出方は (2) より 10 通りであり，最終的に箱 1 に黒球，箱 2，3 に白球が入っているようなさいころの目の出方は (3) より 15 通りである。
　最終的に箱 1，3 に黒球，箱 2 に白球が入っているようなさいころの目の出方は，操作が 3 つの箱に対して対称であることから，最終的に箱 1，2 に黒球，箱 3 に白球が入っているようなさいころの目の出方の数と等しく，10 通りである。
　最終的にすべての箱に黒球が入っているようなさいころの目の出方の数を求めたい。
　余事象の数を考える。
　最終的に 3 つの箱のうち 2 つに黒球が入っているようなさいころの目の出方は，(2) の答えと対称性より

$$10 \times 3 = 30$$

通りであり，最終的に 3 つの箱のうち 1 つに黒球が入っているようなさいころの目の出方は，(3) の答えと対称性より

$$15 \times 3 = 45$$

通りであり，最終的に 3 つの箱のすべてに白玉が入っているようなさいころの目の出方は，(1) の答えより

$$\frac{1}{3} \times 216 = 72$$

通りである。よって最終的にすべての箱に黒球が入っているようなさいころの目の出方の数は，

$$216 - 30 - 45 - 72 = 69$$

通りである。

よって，最終的に箱 1 に黒球が入っているようなさいころの目の出方は

$$15 + 10 + 10 + 69 = 104$$

通りである。よって，最終的に箱 1 に黒球が入っている確率は $\frac{104}{216}$ である。（次に箱 1 に黒球が，箱 3 に白球が入っている確率を求めるが，そのときの分母も 216 になるので，今約分しない方が後の計算が少し楽であり，間違えにくい。）

次に，最終的に箱 1 に黒球が，箱 3 に白球が入っている確率を求める。

最終的に箱 1，2 に黒球，箱 3 に白球が入っているようなさいころの目の出方は (2) より 10 通りであり，最終的に箱 1 に黒球，箱 2，3 に白球が入っているようなさいころの目の出方は (3) より 15 通りである。よって，最終的に箱 1 に黒球が，箱 3 に白球が入っているようなさいころの目の出方は

$$10 + 15 = 25$$

通りである，よって，最終的に箱 1 に黒球が，箱 3 に白球が入っている確率は $\frac{25}{216}$ である.

以上のことから，求める条件付き確率は

$$\frac{\frac{25}{216}}{\frac{104}{216}} = \mathbf{\frac{25}{104}}$$

である。

$\boxed{\text{注釈}}$

(4) の最終的にすべての箱に黒球が入っているようなさいころの目の出方の数を，余事象を使って求める解法は思いつきにくいだろう。思いつかなかった場合は，最終的に箱 1 に黒球が入っているようなさいころの目の出方の数を (1)〜(3) と同様に直接求めることになるが，その解法をここに記しておく。

最終的に箱 1 に黒球が入っていることがありうるのは，パターン A と B と C と D と E と G の場合である。

パターン A になり，かつ最終的に箱 1 に黒球が入っているようなさいころの目の出方は，3 回とも 1〜3 が出るが，少なくとも 1 回は 1 が出るような出方なので，3 回とも 1〜3 が出る場合の数から 3 回とも 2 か 3 が出る場合の数を引いて

$$3^3 - 2^3 = 19$$

通りであり，

パターン B になり，かつ最終的に箱 1 に黒球が入っているようなさいころの目の出方は，1 回目に 4 か 5 が出て，2 回目と 3 回目では両方とも 1〜3 が出るが少なくとも 1 回は 1 が出るような出方なので

$$2 \times (3^2 - 2^2) = 10$$

通りであり，

パターン C になり，かつ最終的に箱 1 に黒球が入っているようなさいころの目の出方は，1 回目に 6 が出て，2 と 3 回目は両方 1〜3 が出るような目の出方なので

$$3^2 = 9$$

通りであり，

パターン D になり，かつ最終的に箱 1 に黒球が入っているようなさいころの目の出方は，2 回目に 4 か 5 が出て，3 回目に 1 が出るような出方なので

$$6 \times 2 = 12$$

通りであり，

パターン E になり，かつ最終的に箱 1 に黒球が入っているようなさいころの目の出方は，2 回目に 6 が出て，3 回目に 1〜3 が出るような目の出方なので

$$6 \times 3 = 18$$

通りであり，

パターン G になり，かつ最終的に箱 1 に黒球が入っているようなさいころの目の出方は，3 回目に 6 が出るような目の出方なので

$$6^2 = 36$$

通りである。

以上のことから，最終的に箱 1 に黒球が入っているようなさいころの目の出方の数は

$$19 + 10 + 9 + 12 + 18 + 36 = 104$$

通りである。

［II］

実数の定数 $a,\ b$ は $0<a<1<b$ を満たすとする。 xy 平面内において不等式

$$x^2+\frac{(y-b)^2}{a^2}\leqq 1$$

により定まる領域を，x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を $V(a,\ b)$ とするとき，以下の各問いに答えよ。

問 1　$V(a,\ b)$ を a と b を用いて表せ。答えのみでよい。

問 2　$n,\ j$ を 1 以上の整数として，$V(a,\ b)$ に対して $W_{n,j}(a)$ を次で定める。

$$W_{n,j}(a)=V\left(a^{n-1},1+\frac{2j-1}{2^{n-1}}\right)$$

この $W_{n,j}(a)$ に対して $X_n(a)$ を次で定める。

$$X_n(a)=\sum_{j=1}^{2^{n-1}}W_{n,j}(a)$$

$X_n(a)$ を a と n を用いて表せ。答えのみでよい。

問 3　問 2 の $X_n(a)$ に対して次の無限級数が収束するための a に対する必要十分条件を求め，そのときの無限級数の和を a を用いて表せ。

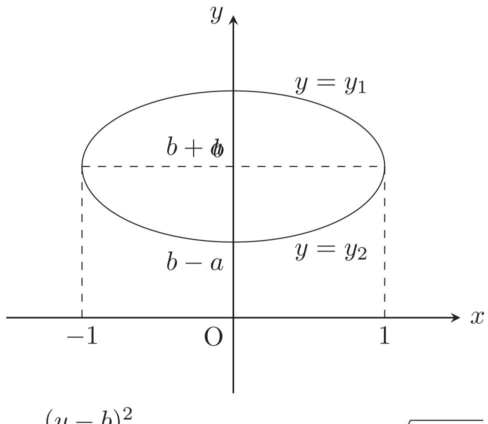
$$\sum_{n=1}^{\infty}nX_n(a)$$

なお必要ならば，$-1<r<1$ を満たす実数の定数 r に対して次が成り立つことを用いてよい。

$$\lim_{n\to\infty}nr^n=0$$

解答

問 1



$$x^2+\frac{(y-b)^2}{a^2}=1 \iff y=b-a\sqrt{1-x^2}$$

より，

$$y_1=b+a\sqrt{1-x^2},\ y_2=b\pm a\sqrt{1-x^2}$$

として，

$$\begin{aligned}
V(a,\ b) &= \int_{-1}^{1} \pi {y_1}^2 dx - \int_{-1}^{1} \pi {y_2}^2 dx \\
&= \pi \int_{-1}^{1} ({y_1}^2 - {y_2}^2) dx \\
&= \pi \int_{-1}^{1} (y_1 + y_2)(y_1 - y_2) dx \\
&= \pi \int_{-1}^{1} 4ab\sqrt{1-x^2} dx \\
&= 4\pi ab \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} dx \\
&= 4\pi ab \times (\text{半径 1 の半円の面積}) \\
&= 4\pi ab \times \frac{\pi}{2} = \boldsymbol{2\pi^2 ab}
\end{aligned}$$

注釈

与えられた楕円は

$$\begin{cases} \text{中心の座標が } (0,\ b) \\ \text{面積 } S = \pi \cdot 1 \cdot a = \pi a \end{cases}$$

であるから，パップス・ギュルダンの定理より

$$V(a,\ b) = 2\pi b \times S = 2\pi^2 ab$$

問 2　問 1 の結果より，

$$\begin{aligned}
W_{n,j}(a) &= V\left(a^{n-1},\ 1 + \frac{2j-1}{2^{n-1}}\right) \\
&= 2\pi^2 \cdot a^{n-1} \cdot \left(1 + \frac{2j-1}{2^{n-1}}\right)
\end{aligned}$$

である。したがって，

$$\begin{aligned}
X_n(a) &= \sum_{j=1}^{2^{n-1}} 2\pi^2 \cdot a^{n-1} \cdot \left(1 + \frac{2j-1}{2^{n-1}}\right) \\
&= 2\pi^2 \left(\frac{a}{2}\right)^{n-1} \sum_{j=1}^{2^{n-1}} (2^{n-1} + 2j - 1) \\
&= 2\pi^2 \left(\frac{a}{2}\right)^{n-1} \left[2^{n-1} \cdot 2^{n-1} + \frac{1}{2}\{1 + (2^n - 1)\}2^{n-1}\right] \\
&= 2\pi^2 \left(\frac{a}{2}\right)^{n-1} \times 4^{n-1} \cdot 2 \\
&= \boldsymbol{4\pi^2 (2a)^{n-1}}
\end{aligned}$$

問 3

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} nX_n(a) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} kX_k(a) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} k\{4\pi^2 (2a)^{k-1}\} \\
&= 4\pi^2 \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} kr^{k-1} \qquad (2a = r \text{ とおいた})
\end{aligned}$$

$r = 1$ のときは $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} kr^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} n(n+1) = \infty$ となり発散することに注意して，$T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kr^{k-1}$ $(r \fallingdotseq 1)$

とする。

$T_n - rT_n$ を計算すると

$$T_n - rT_n = 1 + r + r^2 + \cdots\cdots + r^{n-1} - nr^n$$

$$\therefore\ (1-r)T_n = \frac{1-r^n}{1-r} - nr^n$$

$$\therefore\ T_n = \frac{1-r^n}{(1-r)^2} - \frac{nr^n}{1-r}$$

であるから，

$$\sum_{n=1}^{\infty} nX_n(a) = 4\pi^2 \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1-r^n}{(1-r)^2} - \frac{nr^n}{1-r}\right\}$$

となる。これが収束するための必要十分条件は

$$-1 < r < 1,\ \text{すなわち}\ 0 < 2a < 1 \qquad (\because\ 0 < a < 1)$$

よって，$\boldsymbol{0 < a < \dfrac{1}{2}}$

このとき，

$$\sum_{n=1}^{\infty} nX_n(a) = 4\pi^2 \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1-r^n}{(1-r)^2} - \frac{nr^n}{1-r}\right\}$$

$$= \frac{4\pi^2}{(1-r)^2}$$

$$= \boldsymbol{\frac{4\pi^2}{(2a-1)^2}}$$

[III]

Oを原点とする座標平面において，曲線 C を次で定める。

$$C : x^2 + 2y^2 = 2 \quad (x > 0,\ y < 0)$$

曲線 C 上の点を $\mathrm{P}(\sqrt{2}\cos\theta,\ -\sin\theta)$ （ただし，$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$）とおき，点Pにおける曲線 C の法線を L_θ とおく。また，連立不等式

$$\begin{cases} 0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{4} \\ 0 \leqq y \end{cases}$$

によって定まる座標平面上の領域を R とおく。点Pが曲線 C 上を動くとき，法線 L_θ と R の共通部分からなる線分が通過する領域を D とおく。このとき，以下の各問いに答えよ。

問1　法線 L_θ の方程式を次の形で表すとき，空欄に適する θ の式を求めよ。答えのみでよい。

$$y = \boxed{\quad ア \quad} x + \boxed{\quad イ \quad}$$

問2　k を $0 < k < 1$ を満たす定数とする。関数 $f(\theta) = -k\tan\theta + \sin\theta$ $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ に対して，θ の方程式 $f'(\theta) = 0$ の解を α とし，θ の方程式 $f(\theta) = 0$ の解を β とする。このとき，$f(\alpha)$ を k を用いて表し，関数 $y = f(\theta)$ のグラフの概形をかけ。ただし，グラフの凹凸は考えなくてよい。

問3　D の概形を図示せよ。また D の境界を表す方程式を図中に記入せよ。

問4　D の面積 S を求めよ。ただし，D の境界の面積は0とみなしてよい。

解答

問1　$(\sqrt{2}\cos\theta,\ -\sin\theta)$ における曲線 C の接線は

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\theta)x - (\sin\theta)y = 1$$

であるため，法線の傾きは $-\dfrac{\sqrt{2}\sin\theta}{\cos\theta}$ である。よって法線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= -\frac{\sqrt{2}\sin\theta}{\cos\theta}(x - \sqrt{2}\cos\theta) - \sin\theta \\ &= \boldsymbol{-\sqrt{2}(\tan\theta)x + \sin\theta}. \end{aligned}$$

問2

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= -\frac{k}{\cos^2\theta} + \cos\theta \\ &= \frac{\cos^3\theta - k}{\cos^2\theta} \end{aligned}$$

であるため，α は $\cos\alpha = k^{\frac{1}{3}}$ を満たす。よって

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \sin\alpha\left(1 - \frac{k}{\cos\alpha}\right) \\ &= \sqrt{1 - \cos^2\alpha}\left(1 - \frac{k}{\cos\alpha}\right) \\ &= \sqrt{1 - k^{\frac{2}{3}}}(1 - k^{\frac{2}{3}}) \\ &= \boldsymbol{(1 - k^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

である。

$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で $\cos^2\theta > 0$ であるため，増減表は

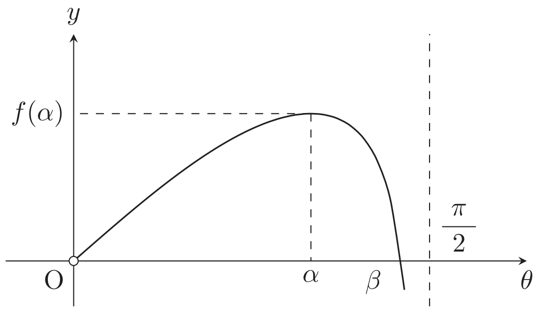
θ	(0)	$\cdots$	α	$\cdots$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$		$\nearrow$		$\searrow$	

となる。

$$\lim_{\theta\to+0} f(\theta) = \lim_{\theta\to+0}(-k\tan\theta + \sin\theta) = 0$$

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0} f(\theta) = \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}(-k\tan\theta + \sin\theta) = -\infty$$

であるため，グラフの概形は次のようになる。



問 3　$(x, y) \in D$ である場合，ある θ $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ が存在して

$$y = -\sqrt{2}(\tan\theta)x + \sin\theta$$

を満たす。

$0 < x \leqq \dfrac{1}{4}$ の範囲で $0 < \sqrt{2}x < 1$ より，x を固定すると問 2 から

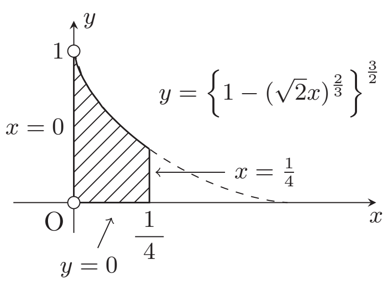
$$-\sqrt{2}(\tan\theta)x + \sin\theta \leqq \{1 - (\sqrt{2}x)^{\frac{2}{3}}\}^{\frac{3}{2}}$$

である。よって，$x \fallingdotseq 0$ のとき，y のとりうる範囲は

$$y \leqq \left\{1 - (\sqrt{2}x)^{\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{3}{2}}$$

である。

$x = 0$ の場合，$y = \sin\theta$ である。$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ より $0 < y < 1$ である。よって D の概形は次のようになる。ただし，境界線は実線の箇所を含み，白丸の箇所は含まない。



問 4

$$S = \int_0^{\frac{1}{4}} \left\{1 - (\sqrt{2}x)^{\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{3}{2}} dx$$

$(\sqrt{2}x)^{\frac{1}{3}} = \sin\theta$ と置換すると，$\dfrac{\sqrt{2}}{3}(\sqrt{2}x)^{-\frac{2}{3}}dx = \cos\theta d\theta$ であるため，$dx = \dfrac{3}{\sqrt{2}}\sin^2\theta\cos\theta d\theta$ である。また，$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2^3}}\right)^{\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ に注意すると，積分区間は

x	0	$\to$	$\frac{1}{4}$
θ	0	$\to$	$\frac{\pi}{4}$

となる。よって積分は次のようになる。

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}}\sin^2\theta\cos\theta d\theta \\
&= \frac{3}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2\theta\cos^4\theta d\theta \\
&= \frac{3}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)^2 \cdot \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta \\
&= \frac{3}{8\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin^2 2\theta + \sin^2 2\theta\cos 2\theta) d\theta \\
&= \frac{3}{8\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1-\cos 4\theta}{2} + \sin^2 2\theta\cos 2\theta\right) d\theta \\
&= \frac{3}{8\sqrt{2}}\left[\frac{\theta}{2} - \frac{1}{8}\sin 4\theta + \frac{1}{6}\sin^3 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{3}{8\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{6}\right) \\
&= \boldsymbol{\frac{3\pi+4}{64\sqrt{2}}}
\end{aligned}$$

[IV]

i を虚数単位とし，複素数 z に対して，z と共役な複素数を $\overline{z}$ で表す。 O を原点とする複素数平面において，z を $|z|=1$ ，かつ $\dfrac{z-\overline{z}}{2i}>0$ を満たす複素数とし，1 以上の整数 n に対して，次の規則 $(R_n[z])$ により複素数 w_n を定める。

$(R_n[z])$:「3 点 A (α_n)，B (β_n)，C (γ_n) を

$$\alpha_n = z^{4n}, \quad \beta_n = |z+1|^2 z^{4n+1}, \quad \gamma_n = z^{4n+2}$$

により定め，三角形 ABC の重心を $G(w_n)$ とおく。」
ここで，複素数 w_n が次の 2 つの条件

$$\text{(i)}\ w_n + \overline{w_n} = 0, \quad \text{(ii)}\ \frac{w_n - \overline{w_n}}{2i} > \frac{2}{3}$$

を共に満たす複素数 z の個数を N_n とし，それら N_n 個の複素数を次のように表す。

$$z_{n,k} = \cos(\theta_{n,k}) + i\sin(\theta_{n,k}) \quad (k=1,\ 2,\dots,\ N_n,\ 0<\theta_{n,1}<\theta_{n,2}<\cdots<\theta_{n,N_n}<\pi)$$

また，$z = z_{n,k}$ に対して，規則 $(R_n[z_{n,k}])$ により定まる三角形 ABC の重心を表す複素数を $w_{n,k}$ とおく。このとき，以下の各問いに答えよ。

問 1　N_n と $\theta_{n,k}$ を求めよ。

問 2　$(z_{n,k})^{4n+1}$ を求めよ。答えのみでよい。

問 3　次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{k-1}{2N_n}\pi \leqq \theta_{n,k} \leqq \frac{k}{2N_n}\pi \quad (k=1,\ 2,\dots,\ N_n)$$

問 4　次の極限を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{N_n}\sum_{k=1}^{N_n} \frac{w_{n,k}}{i}$$

解答

問 1　$|z|=1$ かつ $\dfrac{z-\overline{z}}{2i}>0$ より，

$$z = \cos\theta + i\sin\theta \ \ (0<\theta<\pi)$$

と表せる。ド・モアブルの定理より

$$\begin{cases} \alpha_n = \cos(4n)\theta + i\sin(4n)\theta \\ \beta_n = 2(\cos\theta+1)\{\cos(4n+1)\theta + i\sin(4n+1)\theta\} \\ \gamma_n = \cos(4n+2)\theta + i\sin(4n+2)\theta \end{cases}$$

なお，$|z+1|^2 = 4\cos^2\dfrac{\theta}{2} = 2(\cos\theta+1)$ であることを用いた。

$w_n = \dfrac{\alpha_n + \beta_n + \gamma_n}{3}$ より，条件 (i) について

$$
\begin{aligned}
& w_n + \overline{w_n} = 0 \\
\iff & \frac{\alpha_n + \beta_n + \gamma_n}{3} + \frac{\overline{\alpha_n} + \overline{\beta_n} + \overline{\gamma_n}}{3} = 0 \\
\iff & \cos(4n)\theta + 2(\cos\theta + 1)\cos(4n+1)\theta + \cos(4n+2)\theta = 0 \\
\iff & 2\cos(4n+1)\theta\cos\theta + 2(\cos\theta+1)\cos(4n+1)\theta = 0 \quad (\because \text{和積公式}) \\
\iff & (2\cos\theta + 1)\cos(4n+1)\theta = 0 \quad \cdots\cdots ①
\end{aligned}
$$

続いて，条件 (ii) について

$$
\begin{aligned}
& \frac{w_n - \overline{w_n}}{2i} > \frac{2}{3} \\
\iff & \frac{\alpha_n + \beta_n + \gamma_n}{6i} - \frac{\overline{\alpha_n} + \overline{\beta_n} + \overline{\gamma_n}}{6i} > \frac{2}{3} \\
\iff & \sin(4n)\theta + 2(\cos\theta + 1)\sin(4n+1)\theta + \sin(4n+2)\theta > 2 \\
\iff & 2\sin(4n+1)\theta\cos\theta + 2(\cos\theta+1)\sin(4n+1)\theta > 2 \quad (\because \text{和積公式}) \\
\iff & (2\cos\theta + 1)\sin(4n+1)\theta > 1 \quad \cdots\cdots ②
\end{aligned}
$$

① より

$$\theta = \frac{2}{3}\pi, \text{ または } (4n+1)\theta = \frac{\pi}{2} + \ell\pi \ (\ell\text{は整数})$$

であるが，$\theta = \dfrac{2}{3}\pi$ は ② を満たさないので不適である。

したがって，$(4n+1)\theta = \dfrac{\pi}{2} + \ell\pi$ を ② に代入する。

(I)　$\ell = 2\ell' - 1$ (ℓ'は整数) のとき

$$
\begin{aligned}
② \iff & 2\cos\theta + 1 < -1 \\
\iff & \cos\theta < -1
\end{aligned}
$$

　となるので，これを満たす θ は存在せず，不適である。

(II)　$\ell = 2\ell'$ (ℓ'は整数) のとき

$$
\begin{aligned}
② \iff & 2\cos\theta + 1 > 1 \\
\iff & \cos\theta > 0 \quad \cdots\cdots ③
\end{aligned}
$$

　であり，また，ℓ' のとりうる値の範囲を考えると，$0 < \theta < \pi$ より

$$
\begin{aligned}
& 0 < (4n+1)\theta < (4n+1)\pi \\
\iff & 0 < \frac{\pi}{2} + 2\ell'\pi < (4n+1)\pi \\
\iff & -\frac{1}{4} < \ell' < 2n + \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

　である。ℓ' は整数であることより

$$\ell' = 0,\ 1,\ \cdots,\ 2n$$

　であり，このうち ③ を満たすのは

$$\ell' = 0,\ 1,\ \cdots,\ n-1$$

よって，以上 (I)(II) より

$$(4n+1)\theta = \frac{\pi}{2} + 2\ell'\pi\ (\ell' = 0,\ 1,\ \cdots,\ n-1)$$

であり，これらの θ それぞれに対して z は異なるので，条件 (I)(II) を満たす複素数 z の個数 N_n は $N_n = \boldsymbol{n}$ である。

また，$(4n+1)\theta = \dfrac{\pi}{2} + 2\ell'\pi \iff \theta = \dfrac{4\ell'+1}{4n+1}\cdot\dfrac{\pi}{2}$ $(\ell' = 0,\ 1,\ \cdots,\ n-1)$ であるので $k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$, かつ $0 < \theta_{n,\ 1} < \theta_{n,\ 2} < \cdots < \theta_{n,\ n} < \pi$ より $\ell' = k-1$ とすればよい。よって，$\theta_{n,\ k} = \boldsymbol{\dfrac{4k-3}{4n+1}\cdot\dfrac{\pi}{2}}$ である。

問 2　ド・モアブルの定理より

$$\begin{aligned}(z_{n,\ k})^{4n+1} &= \cos(4n+1)\theta + i\sin(4n+1)\theta \\ &= \cos\left(2k-\frac{3}{2}\right)\pi + i\sin\left(2k-\frac{3}{2}\right)\pi \\ &= \boldsymbol{i}\end{aligned}$$

問 3

$$\begin{aligned} &\frac{k-1}{2n}\pi \leqq \theta_{n,\ k} \leqq \frac{k}{2n}\pi \\ \iff &\frac{k-1}{2n}\pi \leqq \frac{4k-3}{4n+1}\cdot\frac{\pi}{2} \leqq \frac{k}{2n}\pi \\ \iff &\frac{k-1}{n} \leqq \frac{4k-3}{4n+1} \leqq \frac{k}{n}\end{aligned}$$

を示す。

$k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$ より

$$\frac{4k-3}{4n+1} - \frac{k-1}{n} = \frac{n-(k-1)}{n(4n+1)} > 0$$

$$\frac{k}{n} - \frac{4k-3}{4n+1} = \frac{k+3n}{n(4n+1)} > 0$$

が成り立つ。

よって，$\dfrac{k-1}{n} \leqq \dfrac{4k-3}{4n+1} \leqq \dfrac{k}{n}$ が言えるので題意は示された。

問 4　$\theta = \dfrac{4k-3}{4n+1}\cdot\dfrac{\pi}{2}$ に対して

$$\begin{aligned} w_{n,\ k} &= \frac{2}{3}(2\cos\theta+1)\cos(4n+1)\theta + i\cdot\frac{2}{3}(2\cos\theta+1)\sin(4n+1)\theta \\ &= i\cdot\frac{2}{3}\left\{2\cos\left(\frac{4k-3}{4n+1}\cdot\frac{\pi}{2}\right)+1\right\}\end{aligned}$$

であるから

$$\frac{1}{N_n}\sum_{k=1}^{N_n}\frac{w_{n,\ k}}{i} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{3}\left\{2\cos\left(\frac{4k-3}{4n+1}\cdot\frac{\pi}{2}\right)+1\right\}$$

ここで，問 3 の結果より

$$
\begin{aligned}
&\frac{k-1}{n} \leqq \frac{4k-3}{4n+1} \leqq \frac{k}{n} \\
\iff &\cos\left(\frac{k}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\right) \leqq \cos\left(\frac{4k-3}{4n+1}\cdot\frac{\pi}{2}\right) \leqq \cos\left(\frac{k-1}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\right) \\
\iff &\frac{2}{3}\left\{2\cos\left(\frac{k}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\right)+1\right\} \leqq \frac{2}{3}\left\{2\cos\left(\frac{4k-3}{4n+1}\cdot\frac{\pi}{2}\right)+1\right\} \leqq \frac{2}{3}\left\{2\cos\left(\frac{k-1}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\right)+1\right\}
\end{aligned}
$$

$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ として足し合わせて

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{3}\left\{2\cos\left(\frac{k}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\right)+1\right\} \leqq \sum_{k=1}^{n}\frac{2}{3}\left\{2\cos\left(\frac{4k-3}{4n+1}\cdot\frac{\pi}{2}\right)+1\right\} \\
&\qquad \leqq \sum_{k=1}^{n}\frac{2}{3}\left\{2\cos\left(\frac{k-1}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\right)+1\right\} \\
\iff &\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{3}\left\{2\cos\left(\frac{k}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\right)+1\right\} \leqq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{3}\left\{2\cos\left(\frac{4k-3}{4n+1}\cdot\frac{\pi}{2}\right)+1\right\} \\
&\qquad \leqq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{3}\left\{2\cos\left(\frac{k-1}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\right)+1\right\}
\end{aligned}
$$

ここで，区分求積法を用いて

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{k}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\right) \\
&\to \int_0^1 \cos\frac{\pi}{2}x\,dx = \left[\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}x\right]_0^1 = \frac{2}{\pi} \quad (n\to\infty) \\
&\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{k-1}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(\frac{k}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\right) \\
&\to \int_0^1 \cos\frac{\pi}{2}x\,dx = \left[\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}x\right]_0^1 = \frac{2}{\pi} \quad (n\to\infty)
\end{aligned}
$$

であるから

$$
\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{3}\left(2\cos\frac{k}{n}\cdot\frac{\pi}{2}+1\right) \to \frac{2}{3}\left(2\cdot\frac{2}{\pi}+1\right) = \frac{8}{3\pi}+\frac{2}{3} \ (n\to\infty)
$$

$$
\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{3}\left(2\cos\frac{k-1}{n}\cdot\frac{\pi}{2}+1\right) \to \frac{2}{3}\left(2\cdot\frac{2}{\pi}+1\right) = \frac{8}{3\pi}+\frac{2}{3} \ (n\to\infty)
$$

よって，はさみうちの原理より

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{N_n}\sum_{k=1}^{N_n}\frac{w_{n,\ k}}{i} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{3}\left(2\cos\frac{4k-3}{4n+1}\cdot\frac{\pi}{2}+1\right) = \boldsymbol{\frac{8}{3\pi}+\frac{2}{3}}
$$

講評

［Ｉ］［確率］（標準）：複雑なルールに関する確率からの出題であった。あとは余事象や対称性を利用して解くと少し楽になる。

［Ⅱ］［極限］（やや易）：回転体の体積に関する極限の問題であった。典型的な無限級数の出題であるので計算に注意して進めたい。

［Ⅲ］［二次曲線，領域］（やや難）：二次曲線の法線に関する領域の問題であった。誘導が丁寧であるが，最後の計算はやや重いのでうまく計算を進めたい。

［Ⅳ］［複素数平面］（やや難）：複素数平面からの出題であった。条件を丁寧に読み取ることが肝要である。問 1 を突破できると残りは取り組みやすい。

昨年度と比べて同程度の難易度であった。易化した前期に比べると難しく，点数を確保するのも大変であろう。一次突破ラインは 50〜55% 程度か。