解答速報

埼玉医科大学（前期）　数学

2025年 2月 4日実施

$\boxed{1}$

次の問い（問 1，2）の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

(1)　関数 $f(x) = e^x + 3e^{-x}$ は，$x = \dfrac{1}{\boxed{\ 1\ }}\log\boxed{\ 2\ }$ のとき，最小値を $\boxed{\ 3\ }\sqrt{\boxed{\ 4\ }}$ とる。

(2)　複素数平面上において，点 $\alpha = 2 + i$ を点 $\beta = 1 - 2i$ を中心として $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転させると，点 $\left(\sqrt{\boxed{\ 5\ }} - \boxed{\ 6\ }\right)\left(-1 + \boxed{\ 7\ }i\right)$ に移る。

解答

問 1　$e^x > 0$，$3e^{-x} > 0$ より相加平均・相乗平均の関係より

$$\begin{aligned} f(x) &\geqq 2\sqrt{e^x \cdot 3e^{-x}} \\ &= 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

等号は $e^x = 3e^{-x} \iff x = \dfrac{1}{2}\log 3$ のとき成立する。

よって，$f(x)$ は $x = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}\log 3}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{2\sqrt{3}}$ をとる。

問 2　求める点を表す複素数を γ とすると

$$\begin{aligned} \gamma &= \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)(\alpha - \beta) + \beta \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)(1+3i) + 1 - 2i \\ &= (1 - \sqrt{2}) + 2(\sqrt{2} - 1)i \\ &= \boldsymbol{(\sqrt{2} - 1)(-1 + 2i)} \end{aligned}$$

$\boxed{2}$

次の文章を読み，後の問い（問 1〜3）の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

座標平面上の原点 O から x 軸の正の向きに 10m 離れた場所に点 P，O から y 軸の正の向きに 20m 離れた場所に点 Q がある。その場所から P，Q が同時に動き出し，それぞれ x 軸の負の向き，y 軸の負の向きに一定の速さで移動する。

問 1　P，Q が同じ速さで移動するとき，P，Q 間の距離が最短となるのは $\boxed{8}\,\boxed{9}$ m 動いたときで，その距離は $\boxed{10}\sqrt{\boxed{11}}$ m である。

問 2　Q の速さが P の速さの 3 倍のとき，P，Q 間の距離が最短となるのは P が $\boxed{12}$ m 動いたときで，その距離は $\sqrt{\boxed{13}\,\boxed{14}}$ m である。

問 3　$k>0$ とする。Q の速さが P の速さの k 倍のとき，P，Q 間の距離が最短となるのは P が

$$d=\frac{\boxed{15}\,\boxed{16}\left(\boxed{17}\,k+1\right)}{k^{\boxed{18}}+\boxed{19}}$$

だけ動いたときであり，d は

$$k=\frac{-\boxed{20}+\sqrt{\boxed{21}}}{\boxed{22}}$$

で最大となる。

$\boxed{\text{解答}}$

問 1　P，Q の速さが同じとき，P が t[m] 進むと Q も t[m] 進むので，そのとき

$\mathrm{P}(10-t,\ 0)$，$\mathrm{Q}(0,\ 20-t)$

と表せる。よって，

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}^2&=(10-t)^2+(20-t)^2\\&=2t^2-60t+500\\&=2\left(t-15\right)^2+50\qquad(t\geqq 0)\end{aligned}$$

であるから，PQ が最小となるのは，$t=\mathbf{15[m]}$ 動いたときで，その距離は $\sqrt{50}=\mathbf{5\sqrt{2}[m]}$

問 2　Q の速さが P の速さの 3 倍のとき，P が t[m] 進むと Q は $3t$[m] 進むので，そのとき

$\mathrm{P}(10-t,\ 0)$，$\mathrm{Q}(0,\ 20-3t)$

と表せる。よって，

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}^2&=(10-t)^2+(20-3t)^2\\&=10t^2-140t+500\\&=10\left(t-7\right)^2+10\qquad(t\geqq 0)\end{aligned}$$

であるから，PQ が最小となるのは，$t=\mathbf{7[m]}$ 動いたときで，その距離は $\mathbf{\sqrt{10}[m]}$

問 3　Q の速さが P の速さ k 倍のとき，P が t[m] 進むと Q は kt[m] 進むので，そのとき

$\mathrm{P}(10-t,\ 0)$，$\mathrm{Q}(0,\ 20-kt)$

と表せる。よって，

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}^2&=(10-t)^2+(20-kt)^2\\&=(k^2+1)t^2-\frac{20(2k+1)}{k^2+1}t+500\\&=(k^2+1)\left\{t-\frac{10(2k+1)}{k^2+1}\right\}^2+(\text{定数})\qquad(t\geqq 0)\end{aligned}$$

であるから，PQ が最小となるのは，$t=d=\boldsymbol{\dfrac{10(2k+1)}{k^2+1}}\mathbf{[m]}$ 動いたときである。

また，$2k+1=s$ とおくと，$k=\dfrac{s-1}{2}$ $(s>1)$ であり，

$$\begin{aligned} d &= \frac{10s}{\left(\frac{s-1}{2}\right)^2+1} = \frac{40s}{s^2-2s+5} \\ &= \frac{40}{s+\frac{5}{s}-2} \leqq \frac{40}{2\sqrt{s\cdot\frac{5}{s}}-2} = \frac{40}{2\sqrt{5}-2} \quad (\because\ \text{相加平均・相乗平均の関係}) \end{aligned}$$

この等号が成立するのは

$$s=\frac{5}{s}\ (s>1)\ \text{すなわち，}\ s=\sqrt{5}\ \text{のとき}$$

であり，このとき

$$k=\frac{s-1}{2}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

である。ゆえに，d は $k=\dfrac{\mathbf{-1+\sqrt{5}}}{\mathbf{2}}$ のときに最大となる。

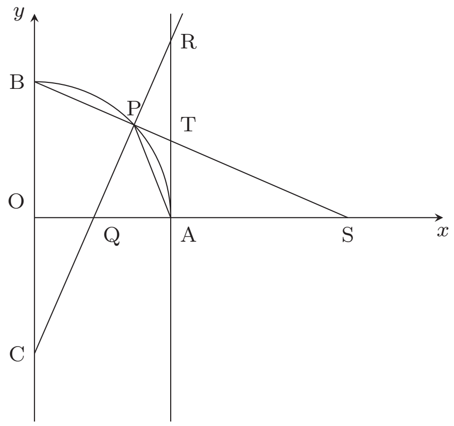
$\boxed{\text{注釈}}$

$\dfrac{10(2k+1)}{k^2+1}$ を k で微分して増減を調べてもよい。

$\boxed{3}$

次の文章を読み，後の問い（問 1〜3）の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

xy 平面上に点 A(1, 0), B(0, 1), C(0, −1) がある。原点 O を中心とする半径 1 の円弧 AB 上の点 P と C を通る直線を ℓ とする。ℓ と x 軸の交点を Q とする。ℓ の傾きを t とする。



問 1　B と P を通る直線を ℓ' とする。ℓ' の傾きは $\dfrac{\boxed{23}\boxed{24}}{t}$ である。

問 2　A を通り y 軸に平行な直線と ℓ の交点を R とし，x 軸と ℓ' の交点を S とする。△PBC と △PQS の面積比が $\dfrac{\triangle\mathrm{PBC}}{\triangle\mathrm{PQS}} = 3$ のとき，$t = \sqrt{\boxed{25}}$ である。またこのとき，線分 AR と線分 PS の交点を T とすると，$\angle\mathrm{ATP} = \dfrac{\boxed{26}}{\boxed{27}}\pi$ である。

問 3　t を問 2 で得た値とする。このとき，線分 PT の長さは

$$\frac{\boxed{28}\sqrt{\boxed{29}} - \boxed{30}}{\boxed{31}}$$

である。

解答

問 1　辺 BC は，原点 O を中心とする半径 1 の円の直径であるため，$\angle\mathrm{BPC} = \dfrac{\pi}{2}$ である。ゆえに直線 l と直線 l' は直交するため，直線 l' の傾きは $\boldsymbol{\dfrac{-1}{t}}$ である。

問 2　直線 l は傾き t で $(0,\ -1)$ を通るため，直線の式は $y = tx - 1$ である。直線 l' は傾き $-\dfrac{1}{t}$ で $(0,\ 1)$ を通るため，直線の式は $y = -\dfrac{x}{t} + 1$ である。点 P はこれらの交点であるため，連立方程式

$$\begin{cases} y = tx - 1 \\ y = -\dfrac{x}{t} + 1 \end{cases}$$

を解くことで，$\mathrm{P}\left(\dfrac{2t}{t^2+1},\ \dfrac{t^2-1}{t^2+1}\right)$ である。

$tx - 1 = 0$ を解くことで $\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{t},\ 0\right)$，$-\dfrac{x}{t} + 1 = 0$ を解くことで $\mathrm{S}(t,\ 0)$ である。

よって

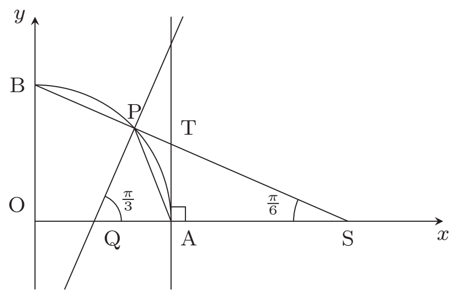
$$\begin{aligned} \triangle\mathrm{PBC} &= \frac{1}{2} \times \frac{2t}{t^2+1} \times 2 \\ &= \frac{2t}{t^2+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{PQS} &= \frac{1}{2}\times\frac{t^2-1}{t^2+1}\times\left(t-\frac{1}{t}\right)\\ &= \frac{(t^2-1)^2}{2t(t^2+1)}\end{aligned}$$

である。$\dfrac{\triangle\mathrm{PBC}}{\triangle\mathrm{PQS}}=3$ に代入すると，

$$\begin{aligned}&\frac{2t}{t^2+1}\times\frac{2t(t^2+1)}{(t^2-1)^2}=3\\ \iff&\left(\frac{2t}{t^2-1}\right)^2=3\\ \iff&3(t^2-1)^2=4t^2\\ \iff&3t^4-10t^2+3=0\\ \iff&t^2=3,\ \frac{1}{3}\end{aligned}$$

問題文の条件より $t>1$ であるため，$t=\boldsymbol{\sqrt{3}}$ である。
こうして l' の傾きは $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ と分かる。よって $\tan\angle\mathrm{TSA}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ であるため，$\angle\mathrm{TSA}=\dfrac{\pi}{6}$ となる。ここで $\angle\mathrm{TAS}=\dfrac{\pi}{2}$ であるため，$\angle\mathrm{STA}=\pi-\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{3}$，よって $\angle\mathrm{ATP}=\pi-\dfrac{\pi}{3}=\boldsymbol{\dfrac{2}{3}\pi}$ となる。

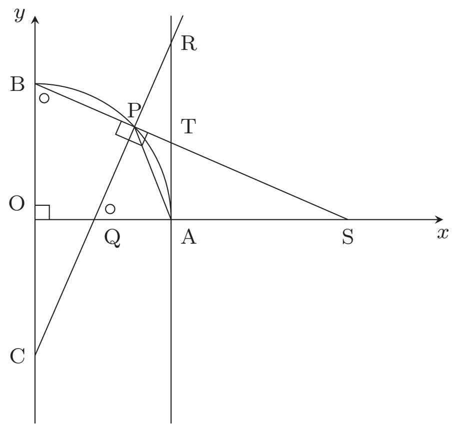


$\boxed{\text{別解}}$

問 1 より $\angle\mathrm{BPC}=\dfrac{\pi}{2}$ であるため，$\angle\mathrm{QPS}=\dfrac{\pi}{2}$ である。よって $\angle\mathrm{BPC}=\angle\mathrm{QPS}$。また，

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{PQS}&=\pi-\angle\mathrm{PQO}\\ &=\pi-\{2\pi-(\angle\mathrm{PBC}+\angle\mathrm{BPQ}+\angle\mathrm{BOQ})\}\\ &=\pi-\left\{2\pi-\left(\angle\mathrm{PBC}+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\right\}\\ &=\angle\mathrm{PBC}\end{aligned}$$

よって $\triangle\mathrm{PBC}$ と $\triangle\mathrm{PQS}$ は相似である。



相似比は面積比の平方根であるため $\sqrt{3}$ である。よって $\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{QS}}=\sqrt{3}$ である。

$\mathrm{BC}=2$，本解答同様に計算して $\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{t},\ 0\right)$，$\mathrm{S}(t,\ 0)$ であるため，$\mathrm{QS}=t-\dfrac{1}{t}$ である。

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{QS}}=\sqrt{3}\\
\iff&\frac{2}{t-\frac{1}{t}}=\sqrt{3}\\
\iff&t-\frac{1}{t}=\frac{2}{\sqrt{3}}\\
\iff&t^2-\frac{2}{\sqrt{3}}t-1=0\\
\iff&t=\sqrt{3},\ -\frac{1}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

である。問題文の条件より $t>1$ より $t=\boldsymbol{\sqrt{3}}$ である。

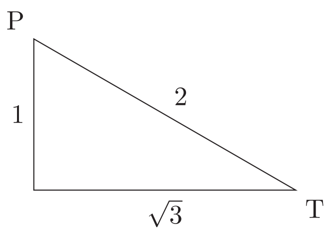
$\boxed{\text{注釈}}$

$\angle\mathrm{ATP}$ は四角形 AQPT が同一円周上にあることに注目すれば

$$\angle\mathrm{ATP}=\pi-\angle\mathrm{AQP}=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi$$

問 3　$t=\sqrt{3}$ のとき $\mathrm{P}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ であるため，P と T の x 座標の差は $1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ である。

l' の傾きが $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ であることに注意すると



より

$$\begin{aligned}
\mathrm{PT}&=\frac{2}{\sqrt{3}}\times\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\
&=\frac{2(2-\sqrt{3})}{2\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

$$= \boldsymbol{\frac{2\sqrt{3}-3}{3}}$$

$\boxed{4}$

次の文章を読み，後の問い（問 1〜3）の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

10 個の見分けがつかないアメ玉を A, B, C, D, E の 5 人に分配する。分配された数が 0 個の人がいてもよい。

問 1　5 人に分配する場合の数は全部で $\boxed{32}\ \boxed{33}\ \boxed{34}\ \boxed{35}$ 通りある。

問 2　整数 k を $0 \leqq k \leqq 10$ とする。A に k 個分配する場合の数は

$$\frac{1}{\boxed{36}}\left(10-k+\boxed{37}\right)\left(10-k+\boxed{38}\right)\left(10-k+\boxed{39}\right)$$

通りある。ただし $\boxed{37} < \boxed{38} < \boxed{39}$ とする。

解答

問 1　A，B，C，D，E に分配されるアメの数をそれぞれ a，b，c，d，e とすると

$$a+b+c+d+e=10,\ a \geqq 0,\ b \geqq 0,\ c \geqq 0,\ d \geqq 0,\ e \geqq 0$$

を満たす組 $(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$ の個数を求めればよい。

よって，○ 10 個と｜4 個の並べ方の総数を考えて

$${}_{14}\mathrm{C}_4 = \mathbf{1001}(\text{個})$$

問 2　問 1 で $a=k$ のときを考えればよいので

$$b+c+d+e=10-k,\ b \geqq 0,\ c \geqq 0,\ d \geqq 0,\ e \geqq 0$$

を満たす組 $(b,\ c,\ d,\ e)$ の個数を求めればよい。

よって，○ $10-k$ 個と｜3 個の並べ方の総数を考えて

$$\begin{aligned}{}_{13-k}\mathrm{C}_3 &= \frac{1}{6}(11-k)(12-k)(13-k)\\ &= \boldsymbol{\frac{1}{6}(10-k+1)(10-k+2)(10-k+3)}\end{aligned}$$

講評

$\boxed{1}$［小問集合 (微分，複素数)］（易）：それぞれ数IIIの分野からの出題であった。基礎的な問題であるため落としたくない。

$\boxed{2}$［二次関数］（やや易）：二次関数にまつわる文章題であった。計算ミスなく解きたい。最後の問題は逆数を取り，相加相乗平均の大小を用いるとシンプルに解けるであろう。

$\boxed{3}$［図形と方程式］（標準）：図形と方程式からの出題であった。誘導が丁寧で解きやすい。実質的には幾何の問題であり，図形的な性質をうまく使いこなしたい。

$\boxed{4}$［場合の数］（易）：重複組合せの問題であった。問 2 は一見難しそうに思えるかもしれないが，実のところ見掛け倒しである。

昨年度と比べて易化した。どの大問も完答を目指したいセットである。一次突破ラインは 70～75% 程度か。