解答速報

聖マリアンナ医科大学（前期）　数学

2025年 2月 6日実施

$\boxed{1}$

a は正の実数，m，n は 2 以上の整数とする。以下の（1），（2）に対する解答を解答用紙の所定の欄に記入せよ。

(1)　$\sqrt[n]{a}$ の定義を述べよ。

(2)　正の実数 b について，$(b^m)^n = b^{mn}$ が成り立つことを用いて，$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$ を示せ。

解答

(1)　正の数 a に対して，

$x^n = a$ を満たす正の数 x がただ 1 つ存在するので，

それを $\sqrt[n]{a}$ と表す。

(2)　$x = (\sqrt[n]{a})^m \ (> 0)$ とおく。

$$\begin{aligned} x^n &= \{(\sqrt[n]{a})^m\}^n \\ &= (\sqrt[n]{a})^{mn} \qquad (\because \ (b^m)^n = b^{mn}) \\ &= (\sqrt[n]{a})^{nm} \\ &= \{(\sqrt[n]{a})^n\}^m \quad (\because \ (b^m)^n = b^{mn}) \\ &= a^m \qquad\qquad (\because \ (1) \text{ より } (\sqrt[n]{a})^n = a) \end{aligned}$$

よって，

$$x^n = a^m$$

が成り立つから，(1) より

$x = \sqrt[n]{a^m}$，すなわち $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$ が成り立つ。■

$\boxed{2}$

3 種類の文字 **a**, **b**, **c** から重複を許して 10 個の文字を選び，

aaaaaaaaaa, **aabbccabcc**, **abcbaccabc**

のように，一列に並べたものを単語と呼ぶことにする。
単語についての次の条件（i）〜（iv）を考える。

(i) **a** を 3 個， **b** を 4 個， **c** を 3 個使って作られている
(ii) 左端の文字は **a** である
(iii) 右端の文字は **b** である
(iv) 同じ文字が隣り合うことはない

また単語から **c** をすべて取り除く操作を d で表す。たとえば，

d（**aaabbbbccc**）= **aaabbbb**， d（**babcabcabc**）= **bababab**

である，以下の (1) ～ (5) の $\boxed{ア}$ ～ $\boxed{カ}$ にあてはまる適切な数を解答用紙の所定の欄に記入せよ。

(1) 条件 (i) を満たす単語の個数は $\boxed{ア}$ 個である。

(2) 条件 (i)，(ii) のすべてを満たす単語の個数は $\boxed{イ}$ 個である。

(3) 条件 (i) ～ (iii) のすべてを満たす単語の個数は $\boxed{ウ}$ 個である。

(4) 条件 (i) ～ (iv) のすべてを満たす単語に操作 d を行う。このとき **aabbbab** となる単語は $\boxed{エ}$ 個，**ababbab** となる単語は $\boxed{オ}$ 個となる。

(5) 条件 (i) ～ (iv) のすべてを満たす単語の個数を求めると $\boxed{カ}$ 個である。

解答

(1) **a** を 3 個，**b** を 4 個，**c** を 3 個並べるため， $\dfrac{10!}{3!4!3!} = \mathbf{4200}$ 個。

(2) 左端に **a** を固定するため，**a** を 2 個，**b** を 4 個，**c** を 3 個並べる順列を計算すればよい。 $\dfrac{9!}{2!4!3!} = \mathbf{1260}$ 個。

(3) 左端に **a** を，右端に **b** を固定するため，**a** を 2 個，**b** を 3 個，**c** を 3 個並べる順列を計算すればよい。 $\dfrac{8!}{2!3!3!} = \mathbf{560}$ 個。

(4) **aabbbab** の文字の間に **c** を配置する。左端に **a** を，右端に **b** を並べつつ，同じ文字が隣り合わないようにするには，下図の ● をすべて埋めるように 3 個の **c** を配置する必要がある。

a ● **a** ○ **b** ● **b** ● **b** ○ **a** ○ **b**

c が 3 個に対して，● は 3 個あるため，配置の仕方は **1** 通り。
次に **ababbab** の文字の間に **c** を配置する。左端に **a** を，右端に **b** を並べつつ，同じ文字が隣り合わないようにするには，下図の ● をすべて埋めるように 3 個の **c** を配置する必要がある。

a ○ **b** ○ **a** ○ **b** ● **b** ○ **a** ○ **b**

c が 3 個に対して，● は 1 個であるため，残った 2 個の **c** を 5 個の ○ に配置することになる。よって，配置の仕方は ${}_{10}\mathrm{C}_2 = \mathbf{10}$ 通り。

(5) (ii),(iii) を満たすように **a**，**b** を並べる順列は ${}_5\mathrm{C}_2 = 10$ である。これら 10 パターンの配置に対して，**c** の配置の仕方を計算する。

(ア) **aaabbbb** のとき

下図の ● をすべて埋めるように 3 個の **c** を配置する必要がある。

a ● **a** ● **a** ○ **b** ● **b** ● **b** ● **b**

c が 3 個に対して，● は 6 個あるため，配置はできず不適。

(イ)　**aababbb** のとき

下図の $\bullet$ をすべて埋めるように 3 個の **c** を配置する必要がある。

$$\mathbf{a}\bullet\mathbf{a}\circ\mathbf{b}\circ\mathbf{a}\circ\mathbf{b}\bullet\mathbf{b}\bullet\mathbf{b}$$

c が 3 個に対して，$\bullet$ は 3 個あるため，配置する方法は 1 通り。

(ウ)　**aabbabb** のとき

下図の $\bullet$ をすべて埋めるように 3 個の **c** を配置する必要がある。

$$\mathbf{a}\bullet\mathbf{a}\circ\mathbf{b}\bullet\mathbf{b}\circ\mathbf{a}\circ\mathbf{b}\bullet\mathbf{b}$$

c が 3 個に対して，$\bullet$ は 3 個あるため，配置する方法は 1 通り。

(エ)　**aabbbab** のとき

(4) より組合せは 1 通り。

(オ)　**abaabbb** のとき

下図の $\bullet$ をすべて埋めるように 3 個の **c** を配置する必要がある。

$$\mathbf{a}\circ\mathbf{b}\circ\mathbf{a}\bullet\mathbf{a}\circ\mathbf{b}\bullet\mathbf{b}\bullet\mathbf{b}$$

c が 3 個に対して，$\bullet$ は 3 個あるため，配置する方法は 1 通り。

(カ)　**abababb** のとき

下図の $\bullet$ をすべて埋めるように 3 個の **c** を配置する必要がある。

$$\mathbf{a}\circ\mathbf{b}\circ\mathbf{a}\circ\mathbf{b}\circ\mathbf{a}\circ\mathbf{b}\bullet\mathbf{b}$$

c が 3 個に対して，$\bullet$ は 1 個であるため，残った 2 個の **c** を 5 個の $\circ$ に配置することになる。よって，配置する方法は ${}_5\mathrm{C}_2 = 10$ 通り。

(キ)　**ababbab** のとき

(4) より配置する方法は 10 通り。

(ク)　**abbaabb** のとき

下図の $\bullet$ をすべて埋めるように 3 個の **c** を配置する必要がある。

$$\mathbf{a}\circ\mathbf{b}\bullet\mathbf{b}\circ\mathbf{a}\bullet\mathbf{a}\circ\mathbf{b}\bullet\mathbf{b}$$

c が 3 個に対して，$\bullet$ は 3 個あるため，配置する方法は 1 通り。

(ケ)　**abbabab** のとき

下図の $\bullet$ をすべて埋めるように 3 個の **c** を配置する必要がある。

$$\mathbf{a}\circ\mathbf{b}\bullet\mathbf{b}\circ\mathbf{a}\circ\mathbf{b}\circ\mathbf{a}\circ\mathbf{b}$$

c が 3 個に対して，$\bullet$ は 1 個であるため，残った 2 個の **c** を 5 個の $\circ$ に配置することになる。よって，配置する方法は ${}_5\mathrm{C}_2 = 10$ 通り。

(コ)　**abbbaab** のとき

下図の $\bullet$ をすべて埋めるように 3 個の **c** を配置する必要がある。

$$\mathbf{a}\circ\mathbf{b}\bullet\mathbf{b}\bullet\mathbf{b}\circ\mathbf{a}\bullet\mathbf{a}\circ\mathbf{b}$$

c が 3 個に対して，$\bullet$ は 3 個あるため，配置する方法は 1 通り。

以上を足すと $1 \times 6 + 10 \times 3 = \mathbf{36}$ 個。

$\boxed{3}$

$0 \leqq x \leqq 2\pi$ で定義された関数 $f(x) = 4\sin x + |2\cos 2x + 1|$ に対し，xy 平面上の曲線 $y = f(x)$ を C とする。以下の (1) ～ (4) の $\boxed{\text{キ}}$ ～ $\boxed{\text{ス}}$ にあてはまる適切な数を解答用紙の所定の欄に記入せよ。

(1) $t = \sin x$ とおき，$f(x)$ を t の式で表す。このとき $f(x) = -4t^2 + 4t + 3$ となる t の範囲を求めると

$$\boxed{\text{キ}} \leqq t \leqq \boxed{\text{ク}}$$

である。

(2) x が $0 \leqq x \leqq 2\pi$ の範囲を動くとき，$f(x)$ の最大値は $\boxed{\text{ケ}}$ で，最小値は $\boxed{\text{コ}}$ である。

(3) 直線 $y = 3$ と曲線 C の共有点の個数は $\boxed{\text{サ}}$ 個である。

(4) 直線 $y = k$ と曲線 C の共有点の個数が 6 個であるような k の値の範囲は

$$\boxed{\text{シ}} < k < \boxed{\text{ス}}$$

である。

$\boxed{\text{解答}}$

(1) $t = \sin x$，$0 \leqq x \leqq 2\pi$ より $-1 \leqq t \leqq 1$ である。

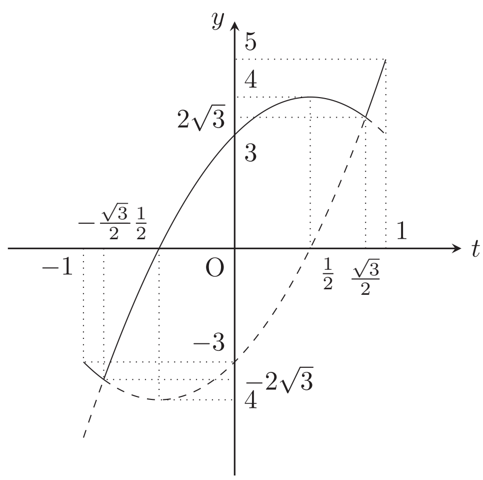
$$\begin{aligned} f(x) &= 4\sin x + |2(1 - 2\sin^2 x) + 1| \\ &= 4\sin x + |-4\sin^2 x + 3| \\ &= 4t + |-4t^2 + 3| \end{aligned}$$

i) $-4t^2 + 3 \geqq 0$，つまり $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq t \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき
$f(x) = 4t + (-4t^2 + 3) = -4t^2 + 4t + 3$ である。

ii) $-4t^2 + 3 \leqq 0$，つまり $-1 \leqq t \leqq -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq t \leqq 1$ のとき
$f(x) = 4t - (-4t^2 + 3) = 4t^2 + 4t - 3$ である。

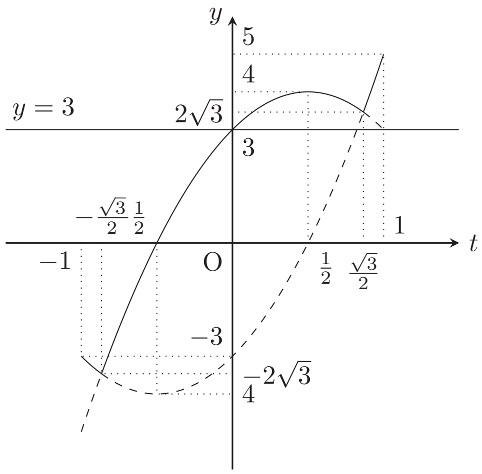
よって，$f(x) = -4t^2 + 4t + 3$ となる t の範囲は $\boldsymbol{-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq t \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}}$ である。

(2) $f(x) = g(t)$ とする。(1) より $g(t) = \begin{cases} -4\left(t - \dfrac{1}{2}\right)^2 + 4 & \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq t \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ 4\left(t + \dfrac{1}{2}\right)^2 - 4 & \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq |t| \leqq 1\right) \end{cases}$ であるので，$y = g(t)$ のグラフは次のようになる。



よって，求める最大値は $\mathbf{5}$ $\left(t=1 \iff x=\dfrac{\pi}{2}\right)$，最小値は $\boldsymbol{-2\sqrt{3}}$ $\left(t=-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \iff x=\dfrac{4}{3}\pi,\ \dfrac{5}{3}\pi\right)$ である。

(3)



$g(t)=3 \iff t=0$ より $\sin x=0$

$0 \leqq x \leqq 2\pi$ に注意して $x=0,\ \pi,\ 2\pi$

よって，求める共有点の個数は **3** 個である。

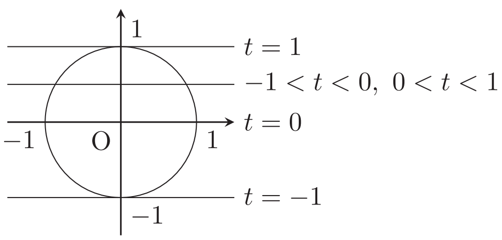
(4)　$t=\sin x,\ 0 \leqq x \leqq 2\pi$ より t と x の対応関係は

$t=0$ のとき，1 つの t に対して対応する x の個数は 3 個,

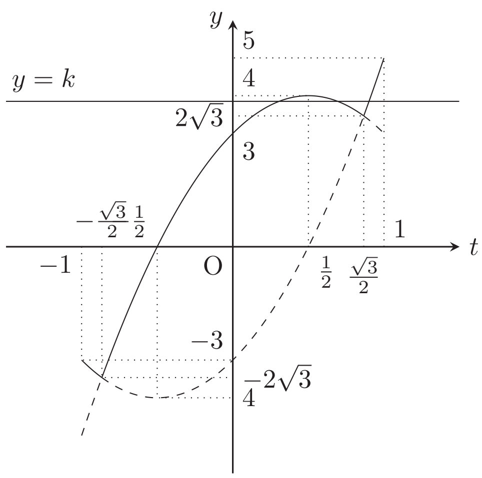
$-1<t<0,\ 0<t<1$ のとき，1 つの t に対して対応する x の個数は 2 個,

$t=\pm 1$ のとき，1 つの t に対して対応する x の個数は 1 個

である。



よって，異なる 6 個の x が存在するような k の値の範囲は $\boldsymbol{2\sqrt{3}<k<4}$ である。



$\boxed{4}$

座標平面における原点を極，x 軸の正の部分を始線として極座標を定める。極方程式 $r=\dfrac{2}{1-\sin\theta}$ が定める曲線を C_1，極方程式 $r=\dfrac{2}{1+\cos\theta}$ が定める曲線を C_2 とする。以下の (1) ～ (3) の $\boxed{\text{セ}}$～$\boxed{\text{ツ}}$ にあてはまる適切な数または式と（4）に対する解答を解答用紙の所定の欄に記入せよ。

(1)　曲線 C_1，C_2 の交点の座標を求めると $(r,\ \theta)=(4+2\sqrt{2},\ \boxed{\text{セ}})$，$(4-2\sqrt{2},\ \boxed{\text{ソ}})$ である。ただし，$0\leqq\theta<2\pi$ とする。

(2)　C_1 を直交座標に関する方程式で表すと

$$y=\boxed{\text{タ}}$$

である。

(3)　C_2 を直交座標に関する方程式で表すと

$$x=\boxed{\text{チ}}$$

であり，y を x の式で表すと

$$y=2\sqrt{\boxed{\text{ツ}}}\text{ または } y=-2\sqrt{\boxed{\text{ツ}}}$$

となる。

(4)　曲線 C_1，C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ。なお解答用紙の所定の欄に計算の過程も記載すること。

$\boxed{\text{解答}}$

(1)　連立方程式

$$\begin{cases} r(1-\sin\theta)=2 & \cdots\cdots ① \\ r(1+\cos\theta)=2 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

を解く。① − ② より $r(\sin\theta+\cos\theta)=0$ である。$r>0$ より $\sin\theta+\cos\theta=0$ である。

$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$ であるため，$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲でこれが 0 になるのは $\theta+\dfrac{\pi}{4}=\pi,\ 2\pi$ のとき。

よって $\theta=\dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{7}{4}\pi$ である。

それぞれ交点を計算すると $\dfrac{2}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=4+2\sqrt{2}$，$\dfrac{2}{1-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}=4-2\sqrt{2}$ であるため，

$\boldsymbol{\left(4+2\sqrt{2},\ \dfrac{3}{4}\pi\right),\ \left(4-2\sqrt{2},\ \dfrac{7}{4}\pi\right)}$ である。

(2)　$r=\dfrac{2}{1-\sin\theta}$ の分母を払うと，$r(1-\sin\theta)=2$ となる。さらに整理すると $r=r\sin\theta+2$ である。これに $r=\sqrt{x^2+y^2}$，$r\sin\theta=y$ を代入し整理すると，$\sqrt{x^2+y^2}=y+2$ である。

辺々を 2 乗すると $x^2+y^2=y^2+4y+4$。整理して $\boldsymbol{y=\dfrac{1}{4}x^2-1}$ を得る。

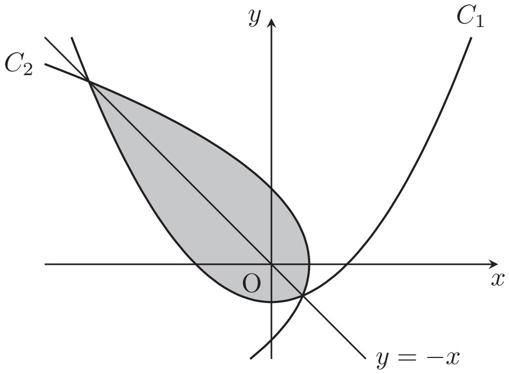
(3)　(2) と同様に $r=\dfrac{2}{1+\cos\theta}$ の分母を払い整理すると $r=2-r\cos\theta$ となる。

ここに $r=\sqrt{x^2+y^2}$，$r\cos\theta=x$ を代入すると $\sqrt{x^2+y^2}=2-x$ である。

辺々を 2 乗すると $x^2+y^2=x^2-4x+4$ であり，x について整理すると $\boldsymbol{x=-\dfrac{1}{4}y^2+1}$ を得る。y について整理すると $y^2=4(1-x)$，つまり $\boldsymbol{y=2\sqrt{1-x},\ -2\sqrt{1-x}}$ を得る。

(4)　求める面積を S とおく。

曲線 C_1 と C_2 で囲まれた部分は $y=-x$ 対称であるため，求める値は曲線 C_1 と $y=-x$ で囲まれた部分の面積の 2 倍である。



(1) より曲線 C_1 と曲線 C_2 の交点の x 座標は

$(4+2\sqrt{2})\cos\dfrac{3}{4}\pi=-2\sqrt{2}-2,\ (4-2\sqrt{2})\cos\dfrac{7}{4}\pi=2\sqrt{2}-2$ で

$$-x-\left(\frac{1}{4}x^2-1\right)=-\frac{1}{4}x^2-x+1=-\frac{1}{4}\{x-(-2\sqrt{2}-2)\}\{x-(2\sqrt{2}-2)\}$$

であるため,

$$\begin{aligned}
S&=2\int_{-2\sqrt{2}-2}^{2\sqrt{2}-2}\left\{-x-\left(\frac{1}{4}x^2-1\right)\right\}dx\\
&=-\frac{1}{2}\int_{-2\sqrt{2}-2}^{2\sqrt{2}-2}\{x-(-2\sqrt{2}-2)\}\{x-(2\sqrt{2}-2)\}dx\\
&=-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\{(2\sqrt{2}-2)-(-2\sqrt{2}-2)\}^3\\
&=\frac{1}{12}\cdot 64\cdot 2\sqrt{2}\\
&=\boldsymbol{\frac{32}{3}\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

講評

$\boxed{1}$［対数関数］（標準）：累乗根の性質に関する証明問題であった。例年の大問 4 で出題されていた証明が大問 1 に移り，小問集合がなくなった。教科書の基本であるが累乗根の性質の証明まで押さえている受験生はほとんどいないだろう。書けることを書いて部分点をもぎ取っていきたい。

$\boxed{2}$［場合の数］（標準）：同じものを含む順列に関する場合の数からの出題であった。誘導が丁寧で時間も十分に確保できるので完答を目指したい。

$\boxed{3}$［三角関数］（標準）：解の個数に関する典型的な出題であった。t と x の対応関係，x の範囲には注意したい。完答を目指したい。

$\boxed{4}$［2 次曲線］（標準）：極方程式で表された関数からの出題であった。極方程式に関する基本的な事柄の出題がほとんであった。最後は対称性に気付けると面積公式も利用でき時間短縮につながる。

昨年度と比べて全体的には同程度くらいの難易度であった。$\boxed{2}$～$\boxed{4}$が取り組みやすいのでそこでしっかりと点数を確保し，$\boxed{1}$で部分点を狙いたい。一次突破ラインは 65～70% 程度か。