解答速報

昭和大学医学部（Ⅰ期）　数学

2025年 2月 7実施

$\boxed{1}$

複素数 α，β が

$$|\alpha| = \sqrt{2}, \quad |\beta| = 4, \quad |4\alpha - \beta| = 4$$

を満たしているとする。次の問いに答えよ。ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

(1)　$\dfrac{\beta}{\alpha}$ および $\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^4$ の値を求めよ。

(2)　$|\alpha + \beta|$ の値を求めよ。ただし，絶対値の記号を用いないこと。

(3)　n は 16 で割って 3 余る整数とする。次の等式が成り立つように a，b を n の式で表せ。

$$|\alpha^n + \beta^n| = \sqrt{2^n\left(1 - 2^a + 2^b\right)}$$

(4)　複素数平面において 3 点 0，α，β を頂点とする三角形の面積 S を求めよ。

解答

$$|\alpha| = \sqrt{2} \ \cdots\cdots ①$$

$$|\beta| = 4 \ \cdots\cdots ②$$

$$|4\alpha - \beta| = 4 \ \cdots\cdots ③$$

(1)　①，②の両辺を 2 乗して

$$\alpha\overline{\alpha} = 2,\ \beta\overline{\beta} = 16$$

より

$$\overline{\alpha} = \frac{4}{\alpha},\ \overline{\beta} = \frac{16}{\beta} \ \cdots\cdots ④$$

③の両辺を 2 乗して

$$(4\alpha - \beta)(4\overline{\alpha} - \overline{\beta}) = 16$$

$$16|\alpha|^2 - 4(\overline{\alpha}\beta + \alpha\overline{\beta}) + |\beta|^2 = 16$$

$$16 \cdot 2 - 4(\overline{\alpha}\beta + \alpha\overline{\beta}) + 16 = 16$$

$$\therefore\ \overline{\alpha}\beta + \alpha\overline{\beta} = 8 \ \cdots\cdots ⑤$$

④を代入し，$z = \dfrac{\beta}{\alpha}$ とおくと

$$\frac{2\beta}{\alpha} + \frac{16\alpha}{\beta} = 8$$

$$z + \frac{8}{z} = 4$$

$$z^2 - 4z + 8 = 0$$

$$\therefore\ z = \frac{\beta}{\alpha} = \mathbf{2 \pm 2i}$$

これを極形式に直すと

$$\frac{\beta}{\alpha}=2\sqrt{2}\left\{\cos\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)\right\}\quad \text{(複号同順，以下同様)}$$

であるから，

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^4=(2\sqrt{2})^4\left\{\cos(\pm\pi)+i\sin(\pm\pi)\right\}=\mathbf{-64}$$

(2)
$$\begin{aligned}|\alpha+\beta|^2&=(\alpha+\beta)(\overline{\alpha}+\overline{\beta})\\&=|\alpha|^2+(\overline{\alpha}\beta+\alpha\overline{\beta})+|\beta|^2\\&=2+8+16=26\qquad (\because\ ⑤)\end{aligned}$$

よって，

$$|\alpha+\beta|=\boldsymbol{\sqrt{26}}$$

$\boxed{\text{別解}}$

$$\begin{aligned}|\alpha+\beta|&=|\alpha|\left|1+\frac{\beta}{\alpha}\right|\\&=\sqrt{2}\ |3\pm 2i|\qquad (\because\ (1))\\&=\sqrt{2}\cdot\sqrt{3^2+(\pm 2)^2}=\boldsymbol{\sqrt{26}}\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}|\alpha^n+\beta^n|&=\left|\alpha^n\left\{1+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n\right\}\right|\\&=|\alpha|^n\left|1+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n\right|\\&=(\sqrt{2})^n\left|1+(2\sqrt{2})^n\left\{\cos\left(\pm\frac{n\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pm\frac{n\pi}{4}\right)\right\}\right|\end{aligned}$$

ここで，n は 16 で割ると 3 余る整数なので，
$n=16k+3$ (k は整数) と表せるから

$$\begin{cases}\cos\left(\pm\dfrac{n\pi}{4}\right)=\cos\left(\pm 4k\pi\pm\dfrac{3}{4}\pi\right)=\cos\left(\pm\dfrac{3}{4}\pi\right)=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin\left(\pm\dfrac{n\pi}{4}\right)=\sin\left(\pm 4k\pi\pm\dfrac{3}{4}\pi\right)=\sin\left(\pm\dfrac{3}{4}\pi\right)=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}$$

であることに注意すると

$$\begin{aligned}|\alpha^n+\beta^n|&=(\sqrt{2})^n\left|1+(2\sqrt{2})^n\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}\pm\frac{1}{\sqrt{2}}i\right\}\right|\\&=(\sqrt{2})^n\left|\left\{1-\frac{1}{\sqrt{2}}(2\sqrt{2})^n\right\}+(2\sqrt{2})^n\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)i\right|\\&=(\sqrt{2})^n\sqrt{\left\{1-\frac{1}{\sqrt{2}}(2\sqrt{2})^n\right\}^2+\left\{(2\sqrt{2})^n\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}^2}\\&=(\sqrt{2})^n\sqrt{1-\sqrt{2}(2\sqrt{2})^n+(2\sqrt{2})^{2n}}\\&=\sqrt{2^n\left(1-2^{\frac{3}{2}n+\frac{1}{2}}+2^{3n}\right)}\end{aligned}$$

よって，

$$\boldsymbol{a=\frac{3}{2}n+\frac{1}{2},\ b=3n}$$

(4)　(1) より，α は β を原点のまわりに $\left(\pm\dfrac{\pi}{4}\right)$ 回転移動した点を表すので，

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}|\alpha||\beta|\sin\frac{\pi}{4} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot 4\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \mathbf{2} \end{aligned}$$

別解

与えられた条件式で $4\alpha = \alpha'$ とおき，O(0)，A(α')，B(β) とすると

$$\begin{aligned} &\mathrm{OA} = |\alpha'| = 4\sqrt{2} \\ &\mathrm{OB} = |\beta| = 4 \\ &\mathrm{AB} = |\alpha' - \beta| = 4 \end{aligned}$$

より，△OAB は OA を斜辺とする直角二等辺三角形である。

よって，

(1) は，

$$\frac{\beta}{\alpha} = 2\sqrt{2}\left\{\cos\left(\pm\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)\right\} = 2 \pm 2i$$

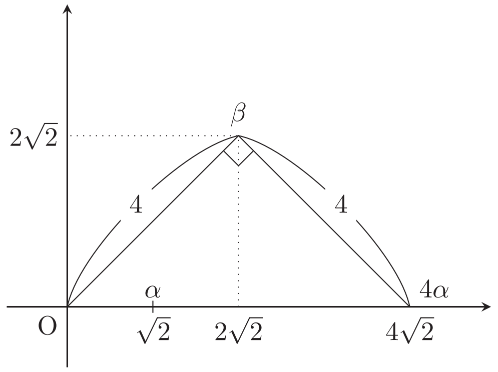
(4) は，

$$S = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot\sqrt{2}\cdot\sin\frac{\pi}{4} = 2$$

とわかる。

注釈

点 0，点 α，点 β の相対的な位置関係が決まる問題であり，また本学が答えを求めるだけなので具体的に α，β を決めると素早く答えは出るだろう。$|\alpha| = \sqrt{2}$，$|\beta| = 4$，$|4\alpha - \beta| = 4$ を満たす点としては例えば $\alpha = \sqrt{2}$，$\beta = 2\sqrt{2} \pm 2\sqrt{2}i$ があるので，この値を用いて計算すればよい。



$\boxed{2}$

次の各問いに答えよ。ただし，設問 $(3-1)$ を除き答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

(1)

(1-1)　2025 と 1928 の最大公約数を求めよ。

(1-2)　次の式が恒等式となるように正の整数 a_1，a_2，a_3，a_4 を定めよ。

$$\frac{2025}{1928}=1+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_4}}}}$$

(2)　a，b は $a<b$ を満たす整数，$f(x)=\left(x-\dfrac{a}{2}\right)\left(x-\dfrac{b}{2}\right)$，$g(x)=f(x^2-2)$ とする。$g(x)$ が $f(x)$ で割り切れるような整数 $(a,\ b)$ の組をすべて求めよ。なお，解答欄には左から a の値が小さい順に並べて記入すること。a の値が等しい場合には左から b の値が小さい順に並べること。

(3)　不等式

$$\left|\log_{\frac{1}{2}} x\right|+\left|\log_{\frac{1}{2}} y\right|\leqq 1$$

の表す領域を E とする。

(3-1)　領域 E を図に示せ。ただし，領域 E の内部は斜線で示し，境界上の点を含む場合は実線で，境界上の点を含まない場合は破線で示すこと。必要最小限の注釈は図中に加えてもよい。

(3-2)　領域 E の面積 S を求めよ。

(4)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}\,(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とする。数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和を S_n とする。このとき，S_{2025} の整数部分を求めよ。必要であれば $\sqrt{2026}$ の値は $\sqrt{2025}$ の値で近似せよ。

$\boxed{\text{解答}}$

(1)(1-1)　ユークリッドの互除法を用いる。

$$2025=1928\cdot 1+97$$
$$1928=97\cdot 19+85$$
$$97=85\cdot 1+12$$
$$85=12\cdot 7+1$$

よって，2025 と 1928 の最大公約数は **1** である。

(1-2)　(1-1) の計算により

$$\frac{2025}{1928}=1+\frac{97}{1928}=1+\frac{1}{\frac{1928}{97}}$$
$$=1+\frac{1}{19+\frac{1}{\frac{97}{85}}}$$
$$=1+\frac{1}{19+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{85}{12}}}}$$
$$=1+\frac{1}{19+\frac{1}{1+\frac{1}{7+\frac{1}{12}}}}$$

なので，$a_1=\mathbf{19}$，$a_2=\mathbf{1}$，$a_3=\mathbf{7}$，$a_4=\mathbf{12}$ である。

(2)

$$f(x)=\left(x-\frac{a}{2}\right)\left(x-\frac{b}{2}\right)$$
$$g(x)=f\left(x^2-2\right)=\left(x^2-2-\frac{a}{2}\right)\left(x^2-2-\frac{b}{2}\right)$$

より，$g(x)$ が $f(x)$ で割り切れるためには

$$\begin{cases} g\left(\dfrac{a}{2}\right)=0 & \cdots\cdots ① \\ g\left(\dfrac{b}{2}\right)=0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

であればよい。

$$\begin{aligned} ① &\iff \left(\frac{a^2}{4}-2-\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a^2}{4}-2-\frac{b}{2}\right)=0 \\ &\iff \left(a^2-2a-8\right)\left(a^2-2b-8\right)=0 \\ &\iff (a+2)(a-4)\left(a^2-2b-8\right)=0 \\ &\iff a=-2 \text{ または } a=4 \text{ または } a^2-2b-8=0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ② &\iff \left(\frac{b^2}{4}-2-\frac{a}{2}\right)\left(\frac{b^2}{4}-2-\frac{b}{2}\right)=0 \\ &\iff \left(b^2-2a-8\right)\left(b^2-2b-8\right)=0 \\ &\iff (b+2)(b-4)\left(b^2-2a-8\right)=0 \\ &\iff b=-2 \text{ または } b=4 \text{ または } b^2-2a-8=0 \end{aligned}$$

である。よって，①のそれぞれの場合について②を考えて

$\underline{a=-2 \text{ のとき}}$ ・$b=-2$ は $a<b$ を満たさないので不適。

・$b=4$ は適する。

・$b^2-2a-8=0$ は，$b^2+4-8=0 \iff b^2=4$ より，$b=2$ のとき適する。

$\underline{a=4 \text{ のとき}}$ ・$b=-2,\ 4$ は $a<b$ を満たさないので不適。

・$b^2-2a-8=0$ は，$b^2-8-8=0 \iff b^2=16$ より，不適。

$\underline{a^2-2b-8=0 \text{ のとき}}$ ・$b=-2$ のとき，$a^2+4-8=0 \iff a^2=4$ より不適。

・$b=4$ のとき，$a^2-8-8=0 \iff a^2=16$ より，$a=-4$ のとき適する。

・$b^2-2a-8=0$ のとき，$\begin{cases} a^2-2b-8=0 \\ b^2-2a-8=0 \end{cases}$ の 2 式の差をとって

$a^2-b^2+2(a-b)=0 \iff (a-b)(a+b+2)=0$

であり，$a \neq b$ より $a+b+2=0$

$\therefore\ a^2-2(-a-2)-8=0 \iff a^2+2a-4=0$

となるが，これを満たす整数 a は存在しないので不適。

以上より，$(a,\ b)=\boldsymbol{(-4,\ 4),\ (-2,\ 2),\ (-2,\ 4)}$ である。

(3)　$|\log_{\frac{1}{2}} x| + |\log_{\frac{1}{2}} y| \leqq 1 \quad \cdots\cdots (*)$

(3-1)　真数条件より $x > 0,\ y > 0$ である。

①　$x \geqq 1,\ y \geqq 1$ のとき

$$\begin{aligned}(*) &\iff (-\log_{\frac{1}{2}} x) + (-\log_{\frac{1}{2}} y) \leqq 1 \\ &\iff \log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} y \geqq -1 \\ &\iff \log_{\frac{1}{2}} xy \geqq -1 \\ &\iff xy \leqq 2\end{aligned}$$

②　$x \geqq 1,\ 0 < y \leqq 1$ のとき

$$\begin{aligned}(*) &\iff (-\log_{\frac{1}{2}} x) + \log_{\frac{1}{2}} y \leqq 1 \\ &\iff \log_{\frac{1}{2}} \frac{y}{x} \leqq 1 \\ &\iff \frac{y}{x} \geqq \frac{1}{2} \\ &\iff y \geqq \frac{1}{2}x\end{aligned}$$

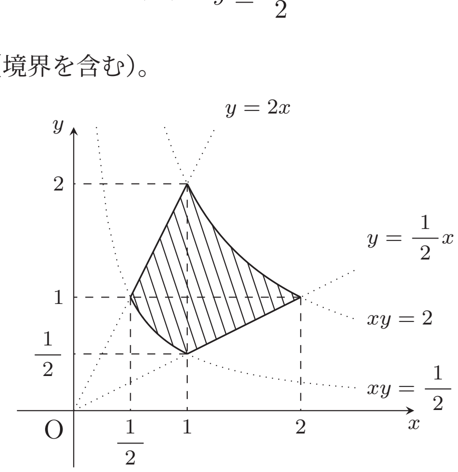
③　$0 < x \leqq 1,\ y \geqq 1$ のとき

$$\begin{aligned}(*) &\iff \log_{\frac{1}{2}} x + (-\log_{\frac{1}{2}} y) \leqq 1 \\ &\iff \log_{\frac{1}{2}} \frac{x}{y} \leqq 1 \\ &\iff \frac{x}{y} \geqq \frac{1}{2} \\ &\iff y \leqq 2x\end{aligned}$$

④　$0 < x \leqq 1,\ 0 < y \leqq 1$ のとき

$$\begin{aligned}(*) &\iff \log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} y \leqq 1 \\ &\iff \log_{\frac{1}{2}} xy \leqq 1 \\ &\iff xy \geqq \frac{1}{2}\end{aligned}$$

よって，下図の斜線部分である（境界を含む)。



(3-2)　$x \geqq 1,\ y \geqq 1$ の部分の面積は

$$\int_1^2 \frac{2}{x}dx - 1 = \Big[2\log|x|\Big]_1^2 - 1 = 2\log 2 - 1$$

$0<x<1,\ 0<y<1$ の部分の面積は

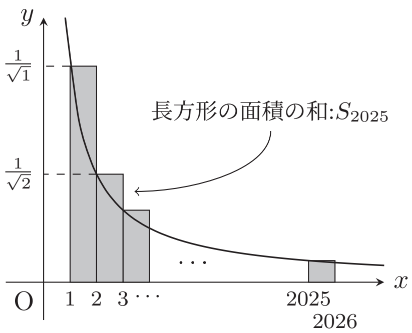
$$\frac{1}{2}-\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{2x}dx=\frac{1}{2}-\left[\frac{1}{2}\log|x|\right]_1^2=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\log 2$$

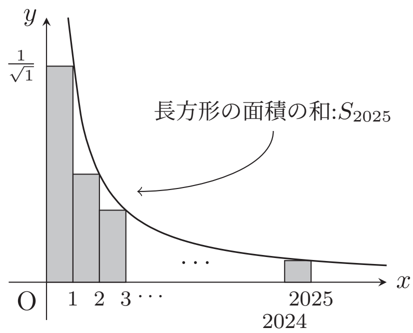
よって，

$$S=(2\log 2-1)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\log 2\right)+\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{3}{2}\log 2}$$

(4) $S_{2025}=\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{2025}}$

$y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ のグラフを考える。





$$\begin{aligned}S_{2025}>\int_1^{2026}\frac{1}{\sqrt{x}}dx&=\Big[2\sqrt{x}\Big]_1^{2026}\\&=2(\sqrt{2026}-1)\\&=2(\sqrt{2025}-1)\\&=2(45-1)\\&=88\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_{2025}<1+\int_1^{2025}\frac{1}{\sqrt{x}}dx&=1+\Big[2\sqrt{x}\Big]_1^{2025}\\&=1+2(\sqrt{2025}-1)\\&=1+2(45-1)\\&=89\end{aligned}$$

なお，問題文の仮定から $\sqrt{2025}=\sqrt{2026}$ として考えた。

よって，$88<S_{2025}<89$ より S_{2025} の整数部分は **88** である。

注釈

問題文には $\sqrt{2026}$ の近似値が与えられているが

$$\begin{aligned}S_{2025}>\int_1^{2026}\frac{1}{\sqrt{x}}dx&=\Big[2\sqrt{x}\Big]_1^{2026}\\&=2(\sqrt{2026}-1)\\&>2(\sqrt{2025}-1)\\&=2(45-1)\\&=88\end{aligned}$$

とすればよいので，近似値は与えられていなくても解くことができる。

$\boxed{3}$

xyz 空間に 3 点 A, B, C がある。 A は xy 平面上にあり，$\mathrm{OA} = 1$ である。 B, C は yz 平面上の点で，y 軸に関して対称である。三角形 OAB が正三角形であり，3 点 A，B，C は y 軸上にないものとする。次の各問いに答えよ。ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) B の y 座標を t とするとき，t がとり得る値の範囲を求めよ。

(2) 四面体 OABC の表面積の最大値を求めよ。

(3) 表面積が最大となる四面体 OABC を x 軸, y 軸, z 軸の周りに回転してできる立体の体積をそれぞれ V_x, V_y, V_z とするとき，V_x, V_y, V_z を求めよ。

解答

(1) △OAB は正三角形であるため，$\mathrm{OB} = \mathrm{OA} = 1$ である。A $(\cos\phi,\ \sin\phi,\ 0)$，B $(0,\ \cos\theta,\ \sin\theta)$ $(0 \leqq \phi,\ \theta \leqq 2\pi)$ とおく。このとき $t = \cos\theta$ である。

$\angle\mathrm{AOB} = \dfrac{\pi}{3}$ より $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}| \cdot |\overrightarrow{\mathrm{OB}}| \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$ である。

一方，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \sin\phi\cos\theta$ である。よって $\sin\phi\cos\theta = \dfrac{1}{2}$，つまり $\cos\theta = \dfrac{1}{2\sin\phi}$ である。

A は y 軸上にないため $\cos\phi \fallingdotseq 0$ である。このとき $\sin\phi \fallingdotseq \pm 1$。また，$0 \leqq \phi \leqq 2\pi$ より $-1 < \sin\phi < 1$ である。よって $\cos\theta < -\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{2} < \cos\theta$。

B もまた y 軸上にないため $\sin\theta \fallingdotseq 0$ である。このとき $\cos\theta \fallingdotseq \pm 1$ であるため，$-1 < \cos\theta < 1$ である。

以上をまとめて $\boldsymbol{-1 < t < -\dfrac{1}{2}}$，$\boldsymbol{\dfrac{1}{2} < t < 1}$ を得る。

(2) 点 B と点 C はどちらも yz 平面上にあり y 軸対称であるため，$\mathrm{OC} = \mathrm{OB} = 1$，$\angle\mathrm{AOC} = \angle\mathrm{AOB} = \dfrac{\pi}{3}$ である。よって △OAC は正三角形である。

また △OAC は正三角形であるため $\mathrm{AC} = 1$ である。こうして △OBC と △ABC は三辺の長さが等しいため合同である。

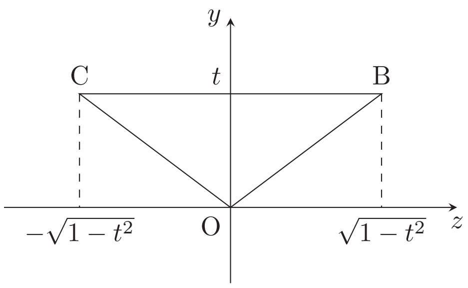
ゆえに四面体 OABC の表面積 S は

$$S = 2\triangle\mathrm{OAB} + 2\triangle\mathrm{OBC}$$

と表される。

△OAB は正三角形であるため，面積は $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ である。△OBC は yz 平面上にある。下図より面積は $|t|\sqrt{1-t^2}$。

（なお，図は対称性より点 B の y 座標，z 座標は正であるとし，$t > 0$ とした。）



よって

$$S = 2|t|\sqrt{1-t^2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$

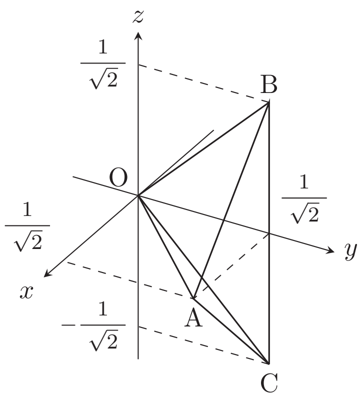
$$= 2|t|\sqrt{1-t^2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= 2\sqrt{t^2 - t^4} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

である。

$$t^2 - t^4 = -\left(t^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

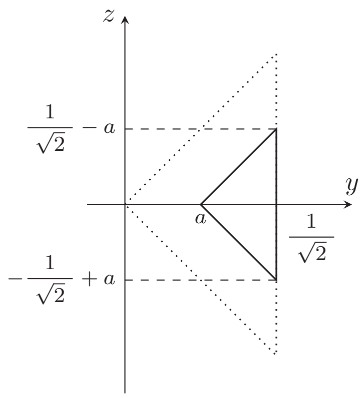
である。(1) より $\frac{1}{4} < t^2 < 1$ であるため，$t^2 = \frac{1}{2}$ のとき，面積は最大値 $2\sqrt{\frac{1}{4}} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}$ をとる。

(3)　対称性より $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ としてよい。また A $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right)$ としてよい。



- V_x の計算

  $x = a\ \left(0 \leqq a \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ と四面体 OABC の断面は下図のようになる。



断面上の点と x 軸との距離の最大値は $\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - a\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}$，最小値は a であるため，回転体の断面積は

$$\pi\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - a\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - a^2\right\} = \pi(1 - \sqrt{2}a)$$

である。よって

$$V_x = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \pi(1-\sqrt{2}a)\ da$$
$$= \pi\Big[a - \frac{\sqrt{2}}{2}a^2\Big]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

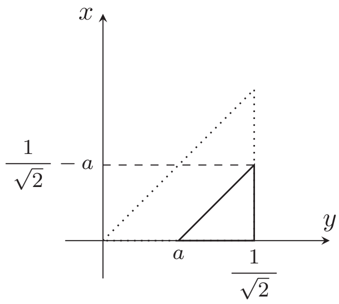
$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{4}\pi$$

$$= \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{4}\pi}$$

- V_y の計算
  y 軸中心で回転してできる図形は，辺 OA を y 軸中心で回転させてできる面を側面とする円錐である。よって，体積は

$$V_y = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{12}\pi}$$

- V_z の計算
  対称性より $z \geqq 0$ の部分の体積を 2 倍すればよい。$z = a$ $\left(0 \leqq a \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ と四面体 OABC の断面は下図のようになる。



断面上の点と z 軸との距離の最大値は $\sqrt{\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} - a\right)^2 + \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}$，最小値は a であるため，回転体の断面積は

$$\pi\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - a\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - a^2\right\} = \pi(1 - \sqrt{2}a)$$

である。よって

$$V_x = 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \pi(1 - \sqrt{2}a)\ da$$

$$= 2\pi\left[a - \frac{\sqrt{2}}{2}a^2\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{2}} - \frac{2\sqrt{2}}{4}\pi$$

$$= \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}\pi}$$

$\boxed{4}$

座標平面上の点 $(1,\ 0)$ に物体 A がある。さいころを振り，1 または 2 の目が出たら，原点のまわりに 15 度時計と逆回りに回転させ，3 から 6 の目が出たときには，原点のまわりに回転させずに，原点から距離 1 だけ遠ざける。物体 A が y 軸に達するまでこれを続ける。このとき，物体 A が点 $(0,\ n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ に達する確率を P_n とする。次の問いに答えよ。ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

(1)　$P_1,\ P_2,\ P_3$ を求めよ。

(2)　物体 A が点 $(0,\ n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ に達する確率 P_n を求めよ。

(3)　P_n を最大にする n をすべて求めよ。

解答

確率 $\dfrac{1}{3}$ で反時計まわりに 15° 回転移動する (この移動を K とする)。
確率 $\dfrac{2}{3}$ で原点から距離 1 だけ遠ざける (この移動を L とする)。

(1)
$$P_1=(K\text{ が続けて 6 回起こる確率})=\left(\frac{1}{3}\right)^6=\boldsymbol{\frac{1}{729}}$$
$$P_2=(6\text{ 回中 }K\text{ が 5 回, }L\text{ が 1 回起こり, 最後に }K\text{ が起こる確率})$$
$$={}_6\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^1\times\frac{1}{3}=\boldsymbol{\frac{4}{729}}$$
$$P_3=(7\text{ 回中 }K\text{ が 5 回, }L\text{ が 2 回起こり, 最後に }K\text{ が起こる確率})$$
$$={}_7\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}=\boldsymbol{\frac{28}{2187}}$$

(2)　点 $(0,\ n)$ に達するのは，$(n+4)$ 回の移動で K が 5 回，L が $n-1$ 回起こり，最後に K が起こるときであるから，求める確率は
$$P_n={}_{n+4}\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\times\frac{1}{3}$$
$$=\frac{2^{n-1}\cdot{}_{n+4}\mathrm{C}_5}{3^{n+5}}$$
$$=\frac{2^{n-1}}{3^{n+5}}\cdot\frac{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)n}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}$$
$$=\boldsymbol{\frac{2^{n-4}}{5\cdot3^{n+6}}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$$

(3)　$\dfrac{P_{n+1}}{P_n}$ を計算すると
$$\frac{P_{n+1}}{P_n}=\frac{\frac{2^{n-3}}{5\cdot3^{n+7}}(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}{\frac{2^{n-4}}{5\cdot3^{n+6}}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$$
$$=\frac{2(n+5)}{3n}$$
となり，$n\geqq1$ であることを考慮すると
$$\frac{P_{n+1}}{P_n}>1\iff 1\leqq n<10$$
$$\frac{P_{n+1}}{P_n}=1\iff n=10$$
$$\frac{P_{n+1}}{P_n}<1\iff n>10$$

である。これより，

$$P_1 < P_2 < \cdots < P_9 < P_{10} = P_{11} > P_{12} > P_{13} > \cdots$$

であることがわかるので，P_n は $n = 10,\ 11$ のときに最大となる。

よって P_n を最大とする n は $n = \mathbf{10,\ 11}$ である。

講評

$\boxed{1}$［複素数平面］（やや難）：複素数平面からの出題であった。答えだけなので，α，β を具体的に決めると計算も早いだろう。

$\boxed{2}$［小問集合］（標準～やや難）：(1) 最大公約数，(2) 整式の割り算，(3) 対数関数の領域と面積，(4) 定積分と不等式からの出題であった。どれもそれなりの計算量を要求された。

$\boxed{3}$［空間座標］（やや難）：空間座標からの出題であった。最後の答えをすべて合わせるのは中々大変ではないだろうか。

$\boxed{4}$［確率］（標準）：確率の最大値からの出題であった。ほかの大問に比べて完答しやすくここでは落としたくない。

昨年度に比べ難化した。1 つ 1 つが重い問題が多く，全体的に得点が取りにくい内容となった。大問 4 を完答し，ほかで点数をかき集めたい。一次突破ボーダーは 50% 程度か。