# 解答速報

# 東邦大学医学部(統一入試)　数学

2025年 2月 23日実施

$\boxed{1}$

(1)　$\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}$ の整数部分を $a$，小数部分を $b$ とするとき，$a = \boxed{1}$，$b = \sqrt{\boxed{2}} - \boxed{3}$ である。また，$a^2 - 3b^2 = -\boxed{4}\boxed{5} + \boxed{6}\boxed{7}\sqrt{\boxed{8}}$ である。

(2)　$\mathrm{AB} = 5$，$\mathrm{BC} = \sqrt{14}$，$\mathrm{CA} = 2$ の $\triangle\mathrm{ABC}$ について，$\cos A = \dfrac{\boxed{9}}{\boxed{10}}$ であり，外接円の半径は $\boxed{11}\sqrt{\boxed{12}}$ である

(3)　さいころを 1 回投げることに，偶数の目が出たら 3 点，奇数の目が出たら 0 点を獲得するゲームを行う。 0 点から開始して，3 回投げ終わったときに得点の合計が 3 点である確率は $\dfrac{\boxed{13}}{\boxed{14}}$ である。また，0 点から開始して，6 回投げ終わったときに得点の合計が 9 点である確率は $\dfrac{\boxed{15}}{\boxed{16}\boxed{17}}$ である。

(4)　方程式 $9^x - 6 \times 3^x = 27$ の解は $x = \boxed{18}$ である。また，不等式 $\left(\dfrac{1}{4}\right)^x - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-1} \leqq 8$ の解は $x \geqq -\boxed{19}$ である。

(5)　次のように定められる数列 $\{a_n\}$ を考える。

$$a_1 = -1, \quad a_{n+1} = 2a_n + 4 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

一般項は $a_n = \boxed{20} \times \boxed{21}^{\,n-1} - \boxed{22}$ である。さらに $\displaystyle\sum_{k=1}^{8} a_k = \boxed{23}\boxed{24}\boxed{25}$ である。

解答

(1)　$\dfrac{1}{\sqrt{5}-2} = \sqrt{5}+2$ であり，$2 \leqq \sqrt{5} < 3$ であることより

$$a = \mathbf{4}$$

$$b = (\sqrt{5}+2) - 4 = \boldsymbol{\sqrt{5} - 2}$$

$$a^2 - 3b^2 = 4^2 - 3(\sqrt{5}-2)^2 = \boldsymbol{-11 + 12\sqrt{5}}$$

(2)　余弦定理より $\cos A = \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$ であるので，$\sin A = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$ である。
よって，$\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円の半径を $R$ とすると正弦定理より

$$2R = \frac{\sqrt{14}}{\sin A} \iff R = \boldsymbol{2\sqrt{2}}$$

(3)　3 回の試行で得点の合計が 3 点となるのは，「偶数の目が 1 回，奇数の目が 2 回」出るときであるので

$$ {}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2=\boldsymbol{\frac{3}{8}} $$

6 回の試行で得点の合計が 9 点となるのは，「偶数の目が 3 回，奇数の目が 3 回」出るときであるので

$$ {}_6\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\boldsymbol{\frac{5}{16}} $$

(4)

$$ 9^x-6\times3^x-27=0 $$
$$ \iff (3^x+3)(3^x-9)=0 $$

$3^x>0$ より，$3^x=9 \iff x=\mathbf{2}$ である。

$$ \left(\frac{1}{4}\right)^x-2\left(\frac{1}{2}\right)^x\leqq 8 $$
$$ \iff \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x+2\right\}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x-4\right\}\leqq 0 $$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x>0$ より，$0<\left(\frac{1}{2}\right)^x\leqq 4 \iff x\geqq \mathbf{-2}$ である。

(5)

$$ a_{n+1}=2a_n+4 $$
$$ \iff a_{n+1}+4=2(a_n+4) $$
$$ \iff a_n+4=(a_1+4)\cdot2^{n-1} $$

$a_1=-1$ より，$a_n=\boldsymbol{3\cdot2^{n-1}-4}$

また

$$ \sum_{k=1}^{8}a_k=\sum_{k=1}^{8}(3\cdot2^{k-1}-4) $$
$$ =3\cdot\frac{2^8-1}{2-1}-4\cdot8 $$
$$ =\mathbf{733} $$

$\boxed{2}$

(1)　複素数平面において，3 つの複素数 $1+3i$，$2-2i$，$k+i$ の表す点が一直線上にあるとき，実数 $k$ の値は $k=\dfrac{\boxed{26}}{\boxed{27}}$ である。

(2)　座標空間において，3 点 A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ 2,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ 3)$ を通る平面に原点 O から垂線 OH を下ろす。$a$ と $b$ を実数として $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=a\overrightarrow{\mathrm{AB}}+b\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と表すとき，$a=\dfrac{\boxed{28}\boxed{29}}{\boxed{30}}$ である。

(3)　関数 $f(x)=(\sin x+\cos x)\sin x\cos x\quad(0\leqq x\leqq\pi)$ を考える。$x$ が $0\leqq x\leqq\pi$ の範囲を動くとき，$t=\sin x+\cos x$ のとり得る値の範囲は $-\boxed{31}\leqq t\leqq\sqrt{\boxed{32}}$ である。$f(x)$ の最小値は $-\dfrac{\sqrt{\boxed{33}}}{\boxed{34}}$ である。

(4)　$n=1,\ 2,\ 3,\cdots$ に対して，整式 $x^{n+2}$ を整式 $3x^2+4x-4$ で割った余りを $a_nx+b_n$ と表す。このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=-\frac{\boxed{35}}{\boxed{36}}$ である。

(5)　座標平面において，直線 $y=\dfrac{3}{4}x$ を $\ell$，円 $(x-4)^2+y^2=4$ を $C$ とする。$C$ の中心と $\ell$ の距離は $\dfrac{\boxed{37}\boxed{38}}{\boxed{39}}$ である。$C$ で囲まれた領域を $\ell$ のまわりに 1 回転してできる立体の体積は $\dfrac{\boxed{40}\boxed{41}}{\boxed{42}}\pi^2$ である。

解答

(1)　条件より，実数 $l$ を用いて

$$(k+i)-(1+3i)=l\{(2-2i)-(1+3i)\}$$
$$\Longleftrightarrow (k-1)-2i=-l+5li$$

$k$，$l$ が実数であることより

$$k-1=-l,\ \text{かつ}\ -2=5l$$

よって，$k=\mathbf{\dfrac{7}{5}}$ である。

(2)

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(1-a-b)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+a\overrightarrow{\mathrm{OB}}+b\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$
$$=(1-a-b,\ 2a,\ 3b)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，かつ $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$，かつ $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ であるので

$$-1+5a+b=0,\ \text{かつ}\ -1+a+10b=0$$
$$\Longleftrightarrow a=\mathbf{\frac{9}{49}},\ \text{かつ}\ b=\frac{4}{49}$$

(3)　$t=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，かつ $\dfrac{\pi}{4}\leqq x+\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{5}{4}\pi$ より

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\leqq 1\iff \mathbf{-1}\leqq t\leqq\boldsymbol{\sqrt{2}}$$

また，$\sin x + \cos x = t$ より $\sin x \cos x = \dfrac{t^2-1}{2}$ より

$$\begin{aligned} f(x) &= t \cdot \frac{t^2-1}{2} \\ &= \frac{t^3}{2} - \frac{t}{2} \quad (= g(t) \text{ とおく}) \end{aligned}$$

であるので

$$g'(t) = \frac{3}{2}\left(t + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(t - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

よって，増減を調べること (略) で求める最小値は，$f\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \boldsymbol{-\dfrac{\sqrt{3}}{9}}$ である。

(4)　商を $Q_n(x)$ とすると

$$x^{n+2} = (x+2)(3x-2)Q_n(x) + a_n x + b_n$$

$x = -2,\ \dfrac{2}{3}$ を代入して，$a_n$，$b_n$ についての連立方程式を解くことで

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{3}{8}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+2} - \dfrac{3}{8}(-2)^{n+2} \\ b_n = \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+2} + \dfrac{1}{4}(-2)^{n+2} \end{cases}$$

よって

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+2} + \frac{1}{4}(-2)^{n+2}}{\frac{3}{8}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+2} - \frac{3}{8}(-2)^{n+2}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+2} + \frac{1}{4}}{\frac{3}{8}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+2} - \frac{3}{8}} \\ &= \frac{\frac{1}{4}}{-\frac{3}{8}} = \boldsymbol{-\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

(5)　$C$ の中心 $(4,\ 0)$ と $\ell : 3x - 4y = 0$ の距離は

$$\frac{|3 \cdot 4 - 4 \cdot 0|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \boldsymbol{\frac{12}{5}}$$

したがって，求める体積は 円 : $\left(x - \dfrac{12}{5}\right)^2 + y^2 = 4$ を $y$ 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積に等しい。

ここで，$\left(x - \dfrac{12}{5}\right)^2 + y^2 = 4 \iff x = \dfrac{12}{5} \pm \sqrt{4-y^2}$ であり，

$x_1 = \dfrac{12}{5} + \sqrt{4-y^2}$，$x_2 = \dfrac{12}{5} - \sqrt{4-y^2}$ とすると，求める体積 $V$ は対称性に注意して

$$\begin{aligned} \frac{V}{2\pi} &= \int_0^2 {x_1}^2 dy - \int_0^2 {x_2}^2 dy \\ &= \frac{48}{5} \int_0^2 \sqrt{4-y^2}\, dy \end{aligned}$$

$\displaystyle\int_0^2 \sqrt{4-y^2}\,dy$ は半径 2 の四分円の面積を表すから

$$V = 2\pi \cdot \frac{48}{5} \cdot \frac{4\pi}{4} = \boldsymbol{\frac{96}{5}\pi^2}$$

$\boxed{\text{注釈}}$

パップス・ギュルダンの定理を用いて

$$4\pi \times 2\pi \cdot \frac{12}{5} = \boldsymbol{\frac{96}{5}\pi^2}$$

講評

$\boxed{1}$［小問集合（数Ⅰ A Ⅱ B)］（易）：(1) 数と式，(2) 三角比，(3) 確率，(4) 指数関数，(5) 数列からの出題であった。どれも教科書レベルであり，ここでの失点はできないだろう。

$\boxed{2}$［小問集合数（Ⅲ C)］（やや易）：(1) 複素数平面，(2) ベクトル，(3) 微分法，(4) 極限，(5) 積分法からの出題であった。どれも教科書～入試基礎レベルであり，なるべく落としたくないだろう。(3)～(5) は分野複合問題でややややりにくい。

今年度からの実施である。二次試験でも数学，理科が課されるので一次試験の難易度としては妥当だろう。