解答速報

東京医科大学　数学

2025年 2月 5日実施

第 1 問

(1)

$$\frac{\cos 25^\circ + \cos 35^\circ}{\sin 40^\circ + \cos 40^\circ} = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}{\boxed{\text{イ}}}$$

である。

(2)　放物線 $y = 3x^2 - 4x - 5$ と放物線 $y = -2x^2 + 15x + 7$ の 2 つの共有点を通る直線の方程式は

$$y = \frac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オ}}}x + \frac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{ク}}}$$

である。

(3)

$$\int_0^4 x\sqrt{x^2 - 2x + 1}dx = \frac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}}$$

である。

(4)　$\omega = \cos\dfrac{2}{5}\pi + i\sin\dfrac{2}{5}\pi$ とすれば,

$$(2-\omega)(2-\omega^2)(2-\omega^3)(2-\omega^4) = \boxed{\text{シス}}$$

である。ただし，i は虚数単位である。

解答

(1)　和積公式を用いる。

$$\begin{aligned}\frac{\cos 25^\circ + \cos 35^\circ}{\sin 40^\circ + \cos 40^\circ} &= \frac{\cos 25^\circ + \cos 35^\circ}{\cos 50^\circ + \cos 40^\circ}\\ &= \frac{2\cos 30^\circ \cos 5^\circ}{2\cos 45^\circ \cos 5^\circ}\\ &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\mathbf{6}}}{\mathbf{2}}\end{aligned}$$

(2)　$\begin{cases} 3x^2 - 4x - 5 - y = 0 \\ 2x^2 - 15x - 7 + y = 0 \end{cases}$　より，実数 k を用いて

$$3x^2 - 4x - 5 - y + k(2x^2 - 15x - 7 + y) = 0 \quad \cdots\cdots ①$$

は 2 つの放物線の共有点を通る図形の方程式を表す。

①に $k=-\dfrac{3}{2}$ を代入して整理すると

$$y=\frac{37}{5}x+\frac{11}{5} \quad \cdots\cdots ②$$

2 つの放物線の共有点を通る直線はただ 1 つであるから，②がその直線そのものである。

よって，求める直線の方程式は

$$\boldsymbol{y=\frac{37}{5}x+\frac{11}{5}}$$

注釈

2 つの放物線の方程式から y を消去して x について整理すると，$5x^2-19x-12=0$ であり，判別式 $=(-19)^2-4\cdot 5\cdot(-12)>0$ より，題意の 2 つの放物線は確かに共有点をもつ。

(3)

$$\begin{aligned}\int_0^4 x\sqrt{(x-1)^2}dx&=\int_0^4 x|x-1|dx\\&=\int_0^1 -x(x-1)dx+\int_1^4 x(x-1)dx\\&=\Big[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\Big]_0^1+\Big[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\Big]_1^4\\&=\boldsymbol{\frac{41}{3}}\end{aligned}$$

注釈

$\displaystyle\int_0^1 -x(x-1)dx=\frac{1}{6}(1-0)^3=\frac{1}{6}$ でもよい。

(4) $(\omega^k)^5=1\ (k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$，$0\leqq \arg\omega<\arg\omega^2<\arg\omega^3<\arg\omega^4<2\pi$ より，

$z^5=1$ の相異なる 5 解は $1,\ \omega,\ \omega^2,\ \omega^3,\ \omega^4$ である。

したがって

$$\begin{aligned}z^5-1&=(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)\\&=(z-1)(z-\omega)(z-\omega^2)(z-\omega^3)(z-\omega^4)\end{aligned}$$

より

$$(z-\omega)(z-\omega^2)(z-\omega^3)(z-\omega^4)=z^4+z^3+z^2+z+1$$

よって，$z=2$ を代入して

$$(2-\omega)(2-\omega^2)(2-\omega^3)(2-\omega^4)=2^4+2^3+2^2+2+1=\mathbf{31}$$

第 2 問

集合 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$ の部分集合について考える。

(1) 集合 A の部分集合は全部で $\boxed{\text{アイウ}}$ 個ある。

(2) 集合 A の部分集合 $B,\ C$ であって，$B \subset C$ となるような B と C の選び方は全部で $\boxed{\text{エオカキ}}$ 通りある。

(3) 集合 A の部分集合 $B,\ C$ であって，$B \cap C$ が空集合となるような B と C の選び方は全部で $\boxed{\text{クケコサ}}$ 通りある。

解答

空集合は任意の集合の部分集合であること，$B \subset C$ は $B=C$ のときにも成り立つことに注意する。

(1) A の 8 個の要素 1 つ 1 つにつき，部分集合に含めるか，含めないかの 2 通りがあるから，

$2^8 = \mathbf{256}$ **通り**

(2) $B \subset C$ が成り立つように，B と C の要素を選ぶには，
A の 1 つ 1 つの要素について，

- C にも B にも含める
- C に含まれるが，B には含まれない
- B と C のいずれにも含まれない

の 3 通りの選び方がある。よって，B と C の選び方は

$3^8 = \mathbf{6561}$ **通り**

注釈

$A=\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ のときの $B \subset C$ となる B と C の選び方を a_n 通りとすると，
上と同様の考え方で，$a_{n+1}=3a_n$（$a_1=3$）が成り立つことがわかる。

別解

C の要素が k 個 $(0 \leqq k \leqq 8)$ のとき，
(1) と同様にして，$B \subset C$ となる B の選び方は 2^k 通りある。
また，C の要素の選び方は ${}_8\mathrm{C}_k$ 通りあるから，求める個数は

$$\sum_{k=0}^{8} {}_8\mathrm{C}_k \cdot 2^k = \sum_{k=0}^{8} {}_8\mathrm{C}_k \cdot 2^k \cdot 1^{8-k}$$
$$= (2+1)^8 \quad (\because \text{二項定理})$$
$$= 3^8 = \mathbf{6561}\ \textbf{通り}$$

(3) $B \cap C = \phi$ が成り立つように B と C の要素を選ぶには，
A の要素 1 つ 1 つについて，

- B のみに含まれる
- C のみに含まれる
- B と C のいずれにも含まれない

の 3 通りの選び方がある。よって，B と C の選び方は

$3^8 = \mathbf{6561}$ **通り**

注釈

$A=\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ のときの $B \cap C = \phi$ となる B と C の選び方を b_n 通りとすると，
上と同様の考え方で，$b_{n+1}=3b_n$（$b_1=3$）が成り立つことがわかる。

$\boxed{\text{別解}}$

(2) の別解と同様に求めることもできる。
C の要素が k 個 $(0 \leqq k \leqq 8)$ のとき，$B \cap C = \phi$ とするには
B は $\overline{C}$（要素は $8-k$ 個）の部分集合となればよいから，
B の要素の選び方は 2^{8-k} 通りある。
また，C の要素の選び方は ${}_8\mathrm{C}_k$ 通りあるから，求める個数は

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{8} {}_8\mathrm{C}_k \cdot 2^{8-k} &= \sum_{k=0}^{8} {}_8\mathrm{C}_k \cdot 2^{8-k} \cdot 1^k \\ &= (2+1)^8 \quad (\because \text{二項定理}) \\ &= 3^8 = \textbf{6561 通り}\end{aligned}$$

第 **3** 問

正の整数 N の桁数を $f(N)$ で表す。例えば，$f(99)=2,\ f(100)=3$ である。$\log_{10}2=0.3010$ とする。

(1) $f(5^{50})=$ $\boxed{\text{アイ}}$ である。

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{100} f(n^2)=$ $\boxed{\text{ウエオ}}$ である。

(3) $f(2^n)=100$ となるような正の整数 n は全部で $\boxed{\text{カ}}$ 個である。

解答

(1) 5^{50} の桁数を求めればよい。

$$\begin{aligned}\log_{10}5^{50}&=50(1-\log_{10}2)\\&=50\cdot 0.6990\\&=34.95\end{aligned}$$

よって，$10^{34}\leqq 5^{50}<10^{35}$ より，$f(5^{50})=\mathbf{35}$ である。

(2) $n^2\ (n=1,\ 2,\ \cdots,\ 100)$ の桁数を整理すると次のようになる。

$1\leqq n\leqq 3$	$4\leqq n\leqq 9$	$10\leqq n\leqq 31$	$32\leqq n\leqq 99$	$n=100$
1 桁	2 桁	3 桁	4 桁	5 桁

よって

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{100} f(n^2)&=1\times 3+2\times 6+3\times 22+4\times 68+5\times 1\\&=\mathbf{358}\end{aligned}$$

(3) 2^n が 100 桁になるような n の値を考えると

$$\begin{aligned}&10^{99}\leqq 2^n<10^{100}\\\iff&99\leqq n\log_{10}2<100\\\iff&\frac{99}{\log_{10}2}\leqq n<\frac{100}{\log_{10}2}\\\iff&\frac{99}{0.3010}\leqq n<\frac{100}{0.3010}\\&\therefore\ 328.9\cdots\leqq n<332.2\cdots\end{aligned}$$

よって，$n=329,\ 330,\ 331,\ 332$ より求める n は全部で **4** 個ある。

第 4 問

座標空間に平行四辺形 ABCD があり，A(1, 0, 0)，B(0, 1, 2)，D(3, 1, 0) である。この平行四辺形 ABCD の周および内部を M とし, M を z 軸のまわりに 1 回転して得られる立体を K とする。

(1)　C の座標は ($\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$, $\boxed{\text{ウ}}$) であり，直線 AB と平面 $z=t$ の共有点の座標は

$$\left(\boxed{\text{エ}}-\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}t,\ \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}t,\ t\right)$$

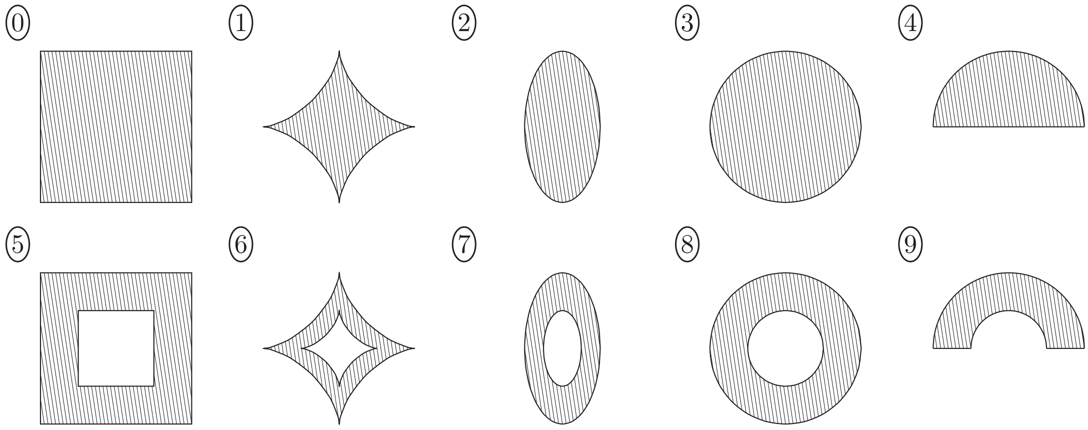
である。

(2)　K を平面 $z=t$ $(0 \leqq t \leqq 2)$ で切った断面の概形として最も適当なものは $\boxed{\text{ケ}}$ であり，K を平面 $z=1$ で切った断面の面積は $\boxed{\text{コ}}\pi$ である。 $\boxed{\text{ケ}}$ の解答は該当する解答群から最も適当なものを一つ選べ。

(3)　K の体積は $\boxed{\text{サシ}}\pi$ である。

(4)　点 P$(a,\ b,\ c)$ が K 上を動くとき，$a^2+b^2+c^2$ の最大値は $\boxed{\text{スセ}}$ である。

【 $\boxed{\text{ケ}}$ の解答群】



解答

(1)　四角形 ABCD は平行四辺形であるため，$\overrightarrow{\text{BC}}=\overrightarrow{\text{AD}}$ であるため,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{OC}}&=\overrightarrow{\text{OB}}+\overrightarrow{\text{AD}}\\&=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

よって，C **(2, 2, 2)** である。

辺 AB と平面 $z=t$ の交点を Q とすると

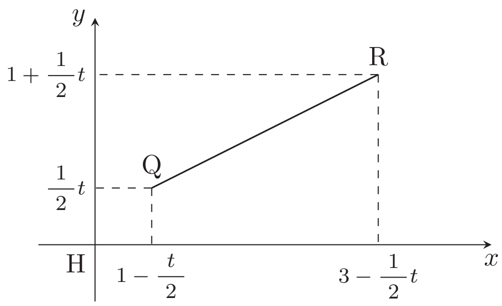
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{OQ}}&=\frac{1}{2}\left\{(2-t)\overrightarrow{\text{OA}}+t\overrightarrow{\text{OB}}\right\}\\&=\frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix}2-t\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\t\\2t\end{pmatrix}\right\}\\&=\begin{pmatrix}1-\frac{t}{2}\\\frac{t}{2}\\t\end{pmatrix}\end{aligned}$$

よって Q $\left(\boldsymbol{1-\frac{t}{2},\ \frac{t}{2},\ t}\right)$

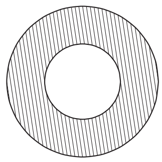
(2)　辺 CD と平面 $z=t$ の交点を R とする。

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ であるため，R $\left(3-\frac{t}{2},\ 1+\frac{1}{2}t,\ t\right)$ である。

M と平面 $z=t$ の交わりは，点 Q と点 R を結んだ線分になる。



この線分上に (0, 0, t) はないため，解答は ⑧ である。



面積は，H (0, 0, t) として

$$
\begin{aligned}
&\pi(\mathrm{HR}^2-\mathrm{HQ}^2)\\
=&\pi\left[\left\{\left(3-\frac{t}{2}\right)^2+\left(1+\frac{t}{2}\right)^2\right\}-\left\{\left(1-\frac{t}{2}\right)^2+\left(\frac{t}{2}\right)\right\}\right]\\
=&(9-t)\pi
\end{aligned}
$$

である。よって，平面 $z=1$ のときの断面の面積は $\boldsymbol{8\pi}$ である。

(3)　体積は

$$\int_0^2(9-t)\pi\ dt=\pi\left[9t-\frac{1}{2}t^2\right]_0^2=\boldsymbol{16\pi}$$

(4)　M 上の任意の点 $P'(a',\ b',\ c')$ に対して，その点を z 軸のまわりに回転させても原点からの距離は変わらないので，点 P が M 上を動く場合について $a^2+b^2+c^2$ の最大値を考える。

平面 $z=t$ で切った断面上で $a^2+b^2+c^2$ の最大値をとる点は $\left(3-\frac{t}{2},\ 1+\frac{1}{2}t,\ t\right)$ であり，

$$a^2+b^2+c^2=\frac{3}{2}t^2-2t+8$$

である。左辺を $f(t)$ とおく。

$$f(t)=\frac{3}{2}\left(t-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{28}{3}$$

であるため，軸は $t=\frac{2}{3}$ である。ここで，$0\leqq t\leqq 2$ であるため，最大値をとる t は $t=2$ である。よって，$a^2+b^2+c^2$ の最大値は $f(2)=\boldsymbol{12}$

注釈

点 P が原点から最も遠い点にあるとき $a^2+b^2+c^2$ は最大となるので，平行四辺形 ABCD の座標を 4 つすべて代入して最大値を求めてもよい。

講評

第 **1** 問［小問集合］（やや易）：(1) 三角関数の式の値，(2) 曲線の束，(3) 積分計算，(4) 複素数平面からの出題であった。(1) 以外は典型的な考え方に従えばすぐに終わるだろう。

第 **2** 問［場合の数］（標準）：集合の要素に関する場合の数からの出題であった。(2)(3) は具体的に考えるとよい。空集合も部分集合となることに注意したい。

第 **3** 問［整数の性質，常用対数］（やや易）：桁数に関する出題であった。解きやすいのでここでは落としたくない。

第 **4** 問［数Ⅲ積分法］（標準）：平面の回転体の体積に関する出題であった。典型的な出題で完答を目指したい。

昨年度に比べてやや易化したか同程度であった。取り組みやすい問題が多かったので丁寧な計算を心がけたい。一次突破ラインは 65〜70% 程度か。