医学部専門予備校 YMS
医学部進学予備校 メビオ
医学部専門予備校 英進館メビオ 福岡校

解答速報

日本大学医学部 N方式(2期)　数学

2025年 3月 4日実施

I

(1)　△ABC において，$\mathrm{AB}^2=\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2+\sqrt{2}\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CA}$ が成り立つとき，$\angle\mathrm{ACB}=\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}^\circ$ である。

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{x}=\boxed{4}$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sin 3x}{x}=\boxed{5}$ である。

(3)　和が 16 で積が 48 以上である 2 つの整数 $(x,\ y)$ の組は $\boxed{6}$ 組ある。

(4)　k を実数とし，円 $x^2+y^2-4x+6y+6=0$ と直線 $y=2x+k$ は 2 点 A，B で交わっているものとする。このとき，線分 AB の長さは $k=\boxed{7}\boxed{8}$ のとき，最大値 $\boxed{9}\sqrt{\boxed{10}}$ をとる。

(5)　方程式 $\log_3 7x=3\cdot\dfrac{\log_5 7}{\log_5 3}$ の解は $x=\boxed{11}\boxed{12}$ である。

解答

(1)　$\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{CA}=b$，$\mathrm{AB}=c$ とする。

条件より

$$c^2=a^2+b^2+\sqrt{2}ab \quad \cdots\cdots ①$$

が成り立つ。

また，余弦定理より

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\angle\mathrm{ACB} \quad \cdots\cdots ②$$

が成り立つ。

①，②より

$$\cos\angle\mathrm{ACB}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore\quad \angle\mathrm{ACB}=\mathbf{135^\circ}$$

(2)

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\cdot3\right)$$
$$=1\cdot3=\mathbf{3}$$

また，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin 3x}{x}=\mathbf{0}$$

($x>0$ のとき $-1\leqq\sin 3x\leqq1$ より，

$$-\frac{1}{x}\leqq\frac{\sin 3x}{x}\leqq\frac{1}{x}$$

が成り立ち，

$$\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

であるから，

はさみうちの原理より，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sin 3x}{x}=0$)

(3)　整数 x，y の条件は

$$\begin{cases} x+y=16 & \cdots\cdots ① \\ xy \geqq 48 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

②より，x と y は同符号でなければならない。

さらに①を満たすには $x>0$，$y>0$ でなければならないことに注意すると，

①と②を満たす整数 x，y の組み合わせは

x	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y	12	11	10	9	8	7	6	5	4

の **9 通り** とわかる。

(4)　与えられた円を C，直線を l とする。

円 C は

$$x^2+y^2-4x+6y+6=0$$

$$\therefore\ \ (x-2)^2+(y+3)^2=7$$

より，中心の座標は O$(2,\ -3)$，半径は $\sqrt{7}$ である。

AB の長さが最大となるのは，直線 l が円 C の中心 O を通るときであるから

$$-3=2\cdot 2+k \qquad \therefore\ \ k=\mathbf{-7}$$

のときであり，このとき AB の長さは円 C の直径に一致し $\mathbf{2\sqrt{7}}$ である。

(5)　まず真数条件より $x>0$ であり，このもとで

$$\log_3 7x = 3\cdot\frac{\log_5 7}{\log_5 3}$$

$$\log_3 7x = 3\cdot\frac{\log_3 7}{\log_3 5}\cdot\frac{\log_3 5}{\log_3 3}$$

$$\log_3 7x = \log_3 7^3$$

$$x=7^2 \ \ (x>0 \text{ を満たす})$$

以上より，$x=\mathbf{49}$

II

O を原点とする複素数平面上に正三角形 OAB があり，3 点 O，A，B はこの順に反時計回りに並んでいる。O(0)，A(α)，B(β) とし，$\alpha = 3\sqrt{3} - i$ とする。ただし，i は虚数単位とする。

(1)　$\beta = \boxed{13}\sqrt{\boxed{14}} + \boxed{15}\,i$ である。

(2)　点 B を，点 A を中心として θ だけ回転させたところ点 C($-2i$) と一致した。このとき，$\cos\theta + i\sin\theta = \dfrac{\boxed{16}}{\boxed{17}} + \dfrac{\boxed{18}}{\boxed{19}}\sqrt{\boxed{20}}\,i$ である。

解答

(1)　点 B(β) は点 A(α) を O(0) のまわりに $\dfrac{\pi}{3}$ 回転移動した点であるから，

$$\beta = \alpha\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \alpha\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$= \frac{1}{2}(3\sqrt{3} - i)(1 + \sqrt{3}i)$$

$$= \frac{1}{2}(4\sqrt{3} + 8i)$$

$$= \boldsymbol{2\sqrt{3} + 4i}$$

(2)　点 C(γ) とする。($\gamma = -2i$)

点 C は点 B を点 A のまわりに θ だけ回転移動した点であるから

$$\gamma - \alpha = (\beta - \alpha)(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\cos\theta + i\sin\theta = \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$$

$$\cos\theta + i\sin\theta = \frac{-2i - (3\sqrt{3} - i)}{(2\sqrt{3} + 4i) - (3\sqrt{3} - i)}$$

$$\cos\theta + i\sin\theta = \frac{(-3\sqrt{3} - i)(-\sqrt{3} - 5i)}{(-\sqrt{3} + 5i)(-\sqrt{3} - 5i)}$$

$$\therefore\quad \cos\theta + i\sin\theta = \boldsymbol{\frac{1}{7} + \frac{4}{7}\sqrt{3}i}$$

III

1〜8 の番号が 1 つずつ書かれたカードが各数字 1 枚ずつ，合計 8 枚ある。この 8 枚のカードから 1 枚を取り出して，カードに書かれた数字を調べてからもとに戻すという試行を 2 回繰り返す。1 回目の試行で取り出されたカードに書かれた数字を X，2 回目の試行で取り出されたカードに書かれた数字を Y とする。

(1)　積 XY が 3 の倍数のとき，和 $X+Y$ も 3 の倍数である条件付き確率は $\dfrac{\boxed{21}}{\boxed{22}}$ である。

(2)　和 $X+Y$ が 3 の倍数のとき，積 XY も 3 の倍数である条件付き確率は $\dfrac{\boxed{23}}{\boxed{24}\,\boxed{25}}$ である。

解答

(1)　積 XY が 3 の倍数である確率は余事象を考えると $1-\left(\dfrac{6}{8}\right)^2=\dfrac{7}{16}$ である。

積 XY と和 $X+Y$ が共に 3 の倍数である場合は $X=3,\ 6,\ Y=3,\ 6$ の組み合わせの 4 パターンであるため，確率は $\dfrac{4}{64}=\dfrac{1}{16}$ である。

よって求める条件付き確率は $\dfrac{\frac{1}{16}}{\frac{7}{16}}=\mathbf{\dfrac{1}{7}}$ である。

(2)　和 $X+Y$ が 3 の倍数である確率は，次の 3 パターンのいずれかである。

- $X=1,\ 4,\ 7,\ Y=2,\ 5,\ 8$
- $X=2,\ 5,\ 8,\ Y=1,\ 4,\ 7$
- $X=3,\ 6,\ Y=3,\ 6$

ゆえに，確率は $\dfrac{3\times3+3\times3+2\times2}{64}=\dfrac{11}{32}$ である。

よって求める条件付き確率は $\dfrac{\frac{1}{16}}{\frac{11}{32}}=\mathbf{\dfrac{2}{11}}$ である。

Ⅳ

O を原点とする座標空間において，3 点 O，A(1，1，−1)，B(2，3，3) を通る平面を α とし，2 点 C(10，0，2)，D(−2，24，8) を通る直線を l とする。

(1) ベクトル $\overrightarrow{n} = (\boxed{26},\ \boxed{27}\ \boxed{28},\ 1)$ は平面 α と垂直である。

(2) 点 C から平面 α に垂直に垂線 CH を下ろすと，H の座標は $(\boxed{29},\ \boxed{30},\ \boxed{31})$ である。

(3) 直線 l と平面 α の交点 P の座標は $(\boxed{32},\ \boxed{33},\ \boxed{34})$ であり，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表すと，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \boxed{35}\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \boxed{36}\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ である。

解答

(1) $\overrightarrow{n}$ は平面 α と直交するため，$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = 0$，$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 0$ である。

$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$ とおくと，直交条件から

$$\begin{cases} a + b - 1 = 0 \\ 2a + 3b + 3 = 0 \end{cases}$$

である。これを解くと $(a,\ b) = (6,\ -5)$ である。よって $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} \mathbf{6} \\ \mathbf{-5} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$ である。

別解

外積を知っていれば簡単に計算できる。

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \times \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 - (-1) \cdot 3 \\ -1 \cdot 2 - 1 \cdot 3 \\ 1 \cdot 3 - 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

より解答が得られる。

(2) 点 H は平面 α 上にあるため，実数 p，q を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = p\overrightarrow{\mathrm{OA}} + q\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

と表される。また，直線 CH は平面 α と直交するため，ある実数 r があり $\overrightarrow{\mathrm{CH}} = r\overrightarrow{n}$ と表される。
以上よりベクトル方程式 $p\overrightarrow{\mathrm{OA}} + q\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}} = r\overrightarrow{n}$ を得る。成分ごとに見ると

$$\begin{cases} p + 2q - 10 = 6r \\ p + 3q = -5r \\ -p + 3q - 2 = r \end{cases}$$

となる。この連立方程式を解くと $(p,\ q,\ r) = (2,\ 1,\ -1)$ であるため

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。こうして H$(\mathbf{4},\ \mathbf{5},\ \mathbf{1})$ である。

(3) 点 P は平面 α 上に存在するため，実数 s，t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

と表される。点 P は直線 l 上に存在するため，実数 u を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-u)\overrightarrow{\mathrm{OC}}+u\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

と表される。
以上よりベクトル方程式 $s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(1-u)\overrightarrow{\mathrm{OC}}+u\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を得る。成分ごとに見ると

$$\begin{cases} s+2t=-12u+10 \\ s+3t=24u \\ -s+3t=6u+2 \end{cases}$$

この連立方程式を解くと $(s,\ t,\ u)=\left(2,\ 2,\ \dfrac{1}{3}\right)$ であるため，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\begin{pmatrix}6\\8\\4\end{pmatrix}$$

である。こうして $\mathrm{P}\boldsymbol{(6,\ 8,\ 4)}$ である。また $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\boldsymbol{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\boldsymbol{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ である。

V

座標平面上に媒介変数 t を用いて

$$\begin{cases} x = 1 - 2\cos 3t \\ y = \sin 2t \end{cases} \quad \left(0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

と表される曲線 C がある。

(1)　C 上の点で x 座標が最大になる点の座標は $\left(\boxed{37},\ \dfrac{\sqrt{\boxed{38}}}{\boxed{39}}\right)$，$y$ 座標が最大になる点の座標は $\left(\boxed{40} + \sqrt{\boxed{41}},\ \boxed{42}\right)$ である。

(2)　曲線 C 上の $t = \dfrac{\pi}{6}$ に対応する点を P とする。P における C の接線と x 軸，および y 軸で囲まれた図形の面積は $\dfrac{\boxed{43}}{\boxed{44}} - \dfrac{\sqrt{\boxed{45}}}{\boxed{46}}$ である。

(3)　x 軸と C で囲まれた図形の面積は $\dfrac{\boxed{47}\,\boxed{48}}{\boxed{49}}$ である。

解答

(1)　x 座標が最大になるのは $\cos 3t = -1$ のときである。$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ に注意すると $t = \dfrac{\pi}{3}$ のときで，

$$x = 1 - 2 \cdot (-1) = 3,\ y = \sin \frac{2}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

であるため，$\left(\mathbf{3},\ \dfrac{\boldsymbol{\sqrt{3}}}{\mathbf{2}}\right)$ である。

y 座標が最大になるのは $\sin 2t = 1$ のときである。$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ に注意すると $t = \dfrac{\pi}{4}$ のときで，

$$x = 1 - 2 \cdot \cos \frac{3}{4}\pi = 1 + \sqrt{2},\ y = 1$$

であるため，$\mathbf{(1 + \sqrt{2},\ 1)}$ である。

(2)　$t = \dfrac{\pi}{6}$ のとき

$$x = 1 - 2\cos \frac{\pi}{2} = 1$$

$$y = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

である。また，x，y をそれぞれ t で微分すると

$$\frac{dx}{dt} = -2 \cdot (-3\sin 3t) = 6\sin 3t$$

$$\frac{dy}{dt} = 2\cos 2t$$

より接線の傾きは

$$\left.\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right|_{t=\frac{\pi}{6}} = \frac{2\cos\frac{\pi}{3}}{6\sin\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{6}$$

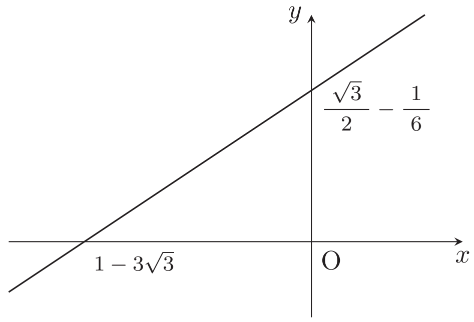
である。よって，接線の方程式は

$$y = \frac{1}{6}(x-1) + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{6}x - \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

である。y 切片は $\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{6}$，$x$ 切片は

$$6 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{6}\right) = -3\sqrt{3} + 1$$

である。よって，P における C の接線と x 軸，および y 軸で囲まれた図形は下図のようになる。



よって，面積は

$$\frac{1}{2}(3\sqrt{3}-1)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{6}\right) = \boldsymbol{\frac{7}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

である。

(3)　(2) より $\dfrac{dx}{dt} = 6\sin 3t$ であるため，x の増減表は

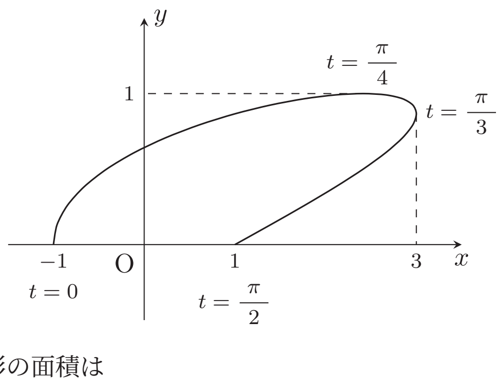
t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
x'	$+$	$+$	0	$-$	$-$
x	$\nearrow$	$\nearrow$		$\searrow$	$\searrow$

となる。

また $\dfrac{dy}{dt} = 2\cos 2t$ であるため，y の増減表は

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
y'	$+$	$+$	0	$-$	$-$
y	$\nearrow$	$\nearrow$		$\searrow$	$\searrow$

となる。よって，グラフの概形は



よって x 軸と C で囲まれた図形の面積は

$$\int_{t=0}^{t=\frac{\pi}{3}} y\ dx - \int_{t=\frac{\pi}{2}}^{t=\frac{\pi}{3}} y\ dx = \int_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} y\ dx$$

である。

$$\begin{aligned}\int y\ dx &= \int \sin 2t \cdot 6 \sin 3t\ dt \\ &= \int 3(\cos t - \cos 5t) dt \\ &= 3\sin t - \frac{3}{5}\sin 5t \quad (\text{積分定数は省略})\end{aligned}$$

より，面積は

$$\begin{aligned}\int_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} y\ dx &= \left[3\sin t - \frac{3}{5}\sin 5t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 3 - \frac{3}{5} \\ &= \boldsymbol{\frac{12}{5}}\end{aligned}$$

VI

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

$$a_2 = 34\ ,\quad a_{n+1} = 5a_n - 12n + 31\ \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(1)　$a_1 = \boxed{50}$ である。

(2)　数列 $\{a_n + \alpha n + \beta\}$ が等比数列となるように実数 $\alpha,\ \beta$ を定めるとき，$\alpha = \boxed{51}\boxed{52}$，$\beta = \boxed{53}$ である。

また, 数列 $\{a_n + b_n\}$ が等差数列となるように等比数列 $\{b_n\}$ を定めるとき, 数列 $\{b_n\}$ の初項は $\boxed{54}\boxed{55}$，公比は $\boxed{56}$ である。

解答

(1)　与えられた漸化式に $n = 1$ を代入して

$$a_2 = 5a_1 - 12\cdot 1 + 31$$

$$\therefore\ a_1 = \mathbf{3}$$

(2)

$$\begin{aligned} a_{n+1} + \alpha(n+1) + \beta &= 5a_n - 12n + +31 + \alpha(n+1) + \beta \\ &= 5a_n + (\alpha - 12)n + \alpha + \beta + 31 \quad \cdots\cdots ① \end{aligned}$$

$\{a_n + \alpha n + \beta\}$ が等比数列となるとき

$$1 : \alpha : \beta = 5 : \alpha - 12 : \alpha + \beta + 31$$

$$\iff \begin{cases} 1 : \alpha = 5 : \alpha - 12 \\ 1 : \beta = 5 : \alpha + \beta + 31 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha = -3 \\ \alpha - 4\beta = -31 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha = \mathbf{-3} \\ \beta = \mathbf{7} \end{cases}$$

したがって,

$$\begin{aligned} ① &\iff a_{n+1} - 3(n+1) + 7 = 5(a_n - 3n + 7) \\ &\iff a_n - 3n + 7 = (a_1 - 3\cdot 1 + 7)\cdot 5^{n-1} \\ &\iff a_n = 7\cdot 5^{n-1} + 3n - 7 \end{aligned}$$

$\{a_n + b_n\}$ が等差数列となるとき，$a_n + b_n = (b_n + 7\cdot 5^{n-1}) + 3n - 7$ より，等比数列 $\{b_n\}$ は

$$b_n = -7\cdot 5^{n-1}$$

よって，等比数列 $\{b_n\}$ の初項は $\mathbf{-7}$，公比は $\mathbf{5}$ である。

講評

Ⅰ［小問集合：三角比・極限・整数・図形と方程式・対数関数］(易)：基礎的な問題であるので完答を狙いたい。

Ⅱ［複素数平面］（易）：複素数平面における回転の問題であった。ミスなく計算したい。

Ⅲ［確率］（易）：条件付き確率の問題であった。ここは完答したい。

Ⅳ［ベクトル］（やや易）：空間ベクトルの問題であった。難しい問題ではないため、丁寧な計算を心がけ、完答を目指したい。

Ⅴ［三角関数・数Ⅲ微積分］（標準）：媒介変数表示された関数に関する問題であった。(2) は見かけよりも難しくないため、ここまでは解けたい。

Ⅵ［数列］（やや易）：漸化式の問題であった。誘導は丁寧であるため、しっかりと誘導に乗って解き切りたい。

昨年度と同程度の難易度か。基礎的な計算が多いため、ケアレスミスに注意したい。1 次突破ボーダーは 75～80%程度か。