解答速報

日本大学医学部 N方式（2期）二次試験　数学

2025年 3月 17日実施

［ I ］

k を正の定数とし，2 つの曲線

$$y = kx + 1 \quad \cdots\cdots ① \quad y = \frac{2}{x} \ (x > 0) \quad \cdots\cdots ②$$

を考える。曲線①と②の交点を P とする。以下の問いに答えなさい。

(1)　P の x 座標を k を用いて表しなさい。

(2)　原点 O と P の距離 OP が最小となるような k の値および，そのときの OP の値を求めなさい。

解答

(1)　①②から y を消去して

$$\begin{aligned} & kx + 1 = \frac{2}{x} \\ \iff & kx^2 + x - 2 = 0 \\ \iff & x = \frac{-1 + \pm\sqrt{1+8k}}{2k} \quad (\because k \neq 0) \end{aligned}$$

$x > 0$ より，求める点 P の x 座標は $\boldsymbol{\dfrac{-1+\sqrt{1+8k}}{2k}}$ である。

(2)　$y = \dfrac{2}{x}$ $(x > 0)$ 上の点 P を $\left(p,\ \dfrac{2}{p}\right)$ $(p > 0)$ とすると，相加平均・相乗平均の関係を用いて

$$\begin{aligned} \mathrm{OP} &= \sqrt{p^2 + \frac{4}{p^2}} \\ &\geqq \sqrt{2\sqrt{p^2 \cdot \frac{4}{p^2}}} \\ &= 2 \end{aligned}$$

等号は $p^2 = \dfrac{4}{p^2} \iff p = \sqrt{2}$ $(\because p > 0)$ のとき成立する。

このとき $\mathrm{P}(\sqrt{2},\ \sqrt{2})$ であり，①がこの点を通るとき

$$\sqrt{2} = \sqrt{2}k + 1 \iff k = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって，距離 OP は $k = \boldsymbol{1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}}$ のとき最小値 $\mathbf{2}$ をとる。

注釈

$y = \dfrac{2}{x}$ $(x > 0)$ 上の点 $\mathrm{P}\left(p,\ \dfrac{2}{p}\right)$ $(p > 0)$ における法線が原点 O を通るとき，距離 OP は最小となる。

$y' = -\dfrac{2}{x^2}$ より，$\left(p,\ \dfrac{2}{p}\right)$ における法線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= \frac{p^2}{2}(x-p) + \frac{2}{p} \\ &= \frac{p^2}{2}x - \frac{p^3}{2} + \frac{2}{p} \end{aligned}$$

これが原点 O(0, 0) を通るとき

$$-\frac{p^3}{2} + \frac{2}{p} = 0 \iff p = \sqrt{2} \quad (\because p > 0)$$

として解いてもよいだろう。(1) の座標を利用するのは現実的ではない。

[Ⅱ]

xy 平面上に放物線 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{6}x^2$ があり，その放物線上の点 $\mathrm{A}\left(1,\ \dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)$ における接線を ℓ とし，点 A において ℓ と垂直に交わる直線を m とする。さらに m と y 軸との交点を B とするとき，B を中心とし AB を半径とする円を C とする。以下の問いに答えなさい。

(1) ℓ および m の方程式を求めなさい。

(2) 円 C の方程式を求めなさい。

(3) $-1 \leqq x \leqq 1$ の範囲で，放物線 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{6}x^2$ と円 C で囲まれる図形の面積を求めなさい。

$\boxed{\text{解答}}$

(1) 放物線について

$$y=\frac{\sqrt{3}}{6}x^2 \qquad y'=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

である。したがって，点 A における接線 ℓ の方程式は

$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1)+\frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{\sqrt{3}}{6}}\ \cdots\cdots\ell$$

また，点 A における法線 m の方程式は

$$y=-\sqrt{3}(x-1)+\frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{y=-\sqrt{3}x+\frac{7\sqrt{3}}{6}}\cdots\cdots m$$

(2) m と y 軸との交点 B の座標は

$$\mathrm{B}\left(0,\ \frac{7\sqrt{3}}{6}\right)$$

であり，

$$\mathrm{AB}=\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}=2$$

である。したがって，B を中心とする半径 $\mathrm{AB}=2$ の円 C の方程式は

$$\boldsymbol{x^2+\left(y-\frac{7\sqrt{3}}{6}\right)^2=4}$$

(3) $\mathrm{C}\left(-1,\ \dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)$，$\mathrm{H}\left(0,\ \dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)$ とする。

直角三角形 AHB に着目すると，

$$\mathrm{AH}:\mathrm{HB}:\mathrm{AB}=1:\sqrt{3}:2 \text{ より } \angle\mathrm{ABH}=\frac{\pi}{6}$$

である。

y 軸に関する対称性に注意して，求める面積 S は

$$S=\left(y=\frac{\sqrt{3}}{6}x^2 \text{と BC で囲まれる面積}\right)-(\text{扇形 BAC}-\triangle\mathrm{BAC})$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot 2^3-\left(2^2\pi\cdot\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{3}\right)$$

$$=\boldsymbol{\frac{11\sqrt{3}}{9}-\frac{2}{3}\pi}$$

[Ⅲ]

xy 平面上の原点 O を中心とする半径 1 の円を C とする。C の第 1 象限内の点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ における円 C の接線を ℓ_0 とし，第 4 象限内の点 $\mathrm{Q}(x_1,\ y_1)$ における円 C の接線を ℓ_1 とし，$\angle\mathrm{POQ} = \dfrac{\pi}{2}$ を満たすとする。ℓ_0 と ℓ_1 の交点を A，ℓ_0 と y 軸との交点を B，ℓ_1 と y 軸との交点を C とする。また，$x_0 = \cos\theta$, $y_0 = \sin\theta$, $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ と表す。以下の問いに答えなさい。

(1)　A，B，C の座標を θ を用いて表しなさい。

(2)　三角形 ABC の面積を S とするとき，S を θ を用いて表しなさい。

(3)　(2) の S の最小値を与える θ の値と S の最小値を求めなさい。

解答

(1)　$\angle\mathrm{POQ} = \dfrac{\pi}{2}$ より

$$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$$

であるから，円 C の点 P における接線 ℓ_0 の方程式は

$$\ell_0\colon (\cos\theta)x + (\sin\theta)y = 1 \quad \cdots\cdots ①$$

であり，B の座標は

$$\mathbf{B}\left(\mathbf{0},\ \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\sin\theta}}\right)$$

また，$\angle\mathrm{POQ} = \dfrac{\pi}{2}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の偏角は $\theta - \dfrac{\pi}{2}$ だから

$$\mathrm{Q}\left(\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right),\ \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right) = (\sin\theta,\ -\cos\theta)$$

なので，円 C の点 Q における接線 ℓ_1 の方程式は

$$\ell_1\colon (\sin\theta)x + (-\cos\theta)y = 1 \quad \cdots\cdots ②$$

であり，C の座標は

$$\mathbf{C}\left(\mathbf{0},\ -\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\cos\theta}}\right)$$

である。

さらに，ℓ_0 と ℓ_1 の交点 A の座標は，①と②を連立して解いて

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\sin\theta + \cos\theta},\ \boldsymbol{\sin\theta - \cos\theta})$$

(2)
$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\mathrm{BC} \times (\text{A の } x \text{ 座標}) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin\theta} + \frac{1}{\cos\theta}\right) \cdot (\sin\theta + \cos\theta) \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}\left(2 + \tan\theta + \frac{1}{\tan\theta}\right)} \end{aligned}$$

(3)　$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ なので $\tan\theta > 0$ であるから，相加平均・相乗平均の関係の不等式より

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\left(2 + \tan\theta + \frac{1}{\tan\theta}\right) \\ &\geqq \frac{1}{2}\left(2 + 2\sqrt{\tan\theta \cdot \frac{1}{\tan\theta}}\right) = 2 \end{aligned}$$

等号成立は，$\tan\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$ かつ $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$

すなわち，$\theta = \dfrac{\pi}{4}$ のときに成立する。

よって，S は $\theta = \boldsymbol{\dfrac{\pi}{4}}$ のときに最小値 **2** をとる。

講評

［ I ］［関数］(やや易)：直線と双曲線に関する出題であった。(2) は (1) を用いて解くのではなく，新たに座標を文字でおいて解くと計算が煩雑にならずに済むだろう。

［ II ］［数 II 微積分］（やや易）：円と放物線で囲まれた領域の面積を求める典型問題であった。特に難しいところはないので計算ミスのないようにしたい。

［ III ］［三角関数］（やや易）：単位円の接線に関する出題であった。特に難しいところはないので計算ミスのないようにしたい。

昨年度と同程度の難易度であった。満点を目指したい内容であるが，1 ミスあたりが合格最低ラインか。