解答速報

埼玉医科大学（後期）　数学

2025年 3月 1日実施

$\boxed{1}$

　次の問い（問 1，2）の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

$0 < a < 1$ とし，関数 $f(x)$，$g(x)$ を

$$f(x) = a(x-a)^2 - a$$

$$g(x) = -a(x+a)^2 + a$$

とする。

問 1　$y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフの共有点は

$$(x,\ y) = \pm\sqrt{\boxed{\ 1\ } - a^{\boxed{\ 2\ }}}\left(\boxed{\ 3\ },\ \boxed{\ 4\ }\boxed{\ 5\ }a^{\boxed{\ 6\ }}\right)$$

である。

問 2　2 つの放物線 $y = f(x)$，$y = g(x)$ で囲まれた図形の面積 S が最大となるのは $a = \dfrac{\boxed{\ 7\ }}{\boxed{\ 8\ }}$ のときで，その値は $S = \dfrac{\sqrt{\boxed{\ 9\ }}}{\boxed{\ 10\ }}$ である。

$\boxed{\text{解答}}$

問 1　$y = f(x)$，$y = g(x)$ の共有点は

$$\begin{cases} y = a(x-a)^2 - a & \cdots ① \\ y = -a(x+a)^2 + a & \cdots ② \end{cases}$$

の解である。① − ② により

$$\begin{aligned} 0 &= a(x-a)^2 - a - \{-a(x+a)^2 + a\} \\ &= a\{x^2 - 2ax + a^2 - 1 - (-x^2 - 2ax - a^2 + 1)\} \\ &= a(2x^2 + 2a^2 - 2) \\ &= 2a(x^2 + a^2 - 1) \end{aligned}$$

より x は $x^2 + a^2 - 1 = 0$ を満たす。よって $x = \pm\sqrt{1-a^2}$ である。① は

$$y = a\{(x-a)^2 - 1\} = a\{(x^2 + a^2 - 1) - 2ax\}$$

であるため，ここに代入すると

$$y = a\{0 - 2a(\pm\sqrt{1-a^2})\}$$

$$= \mp 2a^2\sqrt{1-a^2}$$

である。よって，共有点の座標は $\boldsymbol{\pm\sqrt{1-a^2}(1,\ -2a^2)}$ である。

問 2　$f(x)-g(x)=2a(x-\sqrt{1-a^2})(x+\sqrt{1-a^2})$ であるため

$$\begin{aligned} S &= -\int_{-\sqrt{1-a^2}}^{\sqrt{1-a^2}} 2a(x-\sqrt{1-a^2})(x+\sqrt{1-a^2})dx \\ &= \frac{2a}{6}(2\sqrt{1-a^2})^3 \\ &= \frac{8}{3}\{a^2(1-a^2)^3\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

ここで $h(t)=t(1-t)^3\ (0<t<1)$ とおくと，$S=\dfrac{8}{3}\sqrt{h(a^2)}$ である。

$$\begin{aligned} h'(t) &= (1-t)^3-3t(1-t)^2 \\ &= (1-4t)(1-t)^2 \end{aligned}$$

より増減表は

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$	1
h		$+$	0	$-$	
h'		$\nearrow$		$\searrow$	

であるため，$t=\dfrac{1}{4}$ のときに $h(t)$ は最大値 $h\left(\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{27}{256}$ をとる。よって $a=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$ のとき，S は最大値 $\dfrac{8}{3}\cdot\dfrac{3\sqrt{3}}{16}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$ をとる。

$\boxed{2}$

次の文章を読み，後の問い（問 1〜3）の各枠に当てはまるものを，後の①〜④のうちからそれぞれ 1 つずつ選べ。同じものを繰り返し選んでもよい。

i を虚数単位，z を複素数とする。

選択肢　：　①必要十分条件である　　②必要条件だが十分条件でない
③十分条件だが必要条件でない　④必要条件でも十分条件でもない

問 1　$0 < \phi < \pi$ とする。$z = \cos(2\phi) + i\sin(2\phi)$ は $|z| = 1$ であるための $\boxed{\ 11\ }$。

問 2　$\left|\dfrac{z-i}{z+i}\right| = 1$ は $|z| = 1$ であるための $\boxed{\ 12\ }$。

問 3　$\left|\dfrac{\sqrt{2}z-1}{z-\sqrt{2}}\right| = 1$ は $|z| = 1$ であるための $\boxed{\ 13\ }$。

解答

問 1　$z = \cos(2\phi) + i\sin(2\phi)\ (0 < \phi < \pi)$ であれば，$|z| = \sqrt{\cos^2(2\phi) + \sin^2(2\phi)} = 1$ である。
一方，$1 = \cos 0 + i\sin 0$ は $\cos(2\phi) + i\sin(2\phi)\ (0 < \phi < \pi)$ の形で表されないが，$|z| = 1$ を満たす。
以上より，十分条件だが必要条件でない。(③)

問 2　z が $\left|\dfrac{z-i}{z+i}\right| = 1$ を満たすとき，$|z-i| = |z+i|\ (z \fallingdotseq -i)$ である。よって，z は i と $-i$ を結ぶ線分の垂直二等分線上に存在するため，$|z| = 1$ という条件とは必要でも十分でもない。(④)

注釈

式変形を続けると以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{z-i}{z+i}\right| = 1 \\
\iff& |z-i| = |z+i| && (z \fallingdotseq -i) \\
\iff& (z-i)(\overline{z}+i) = (z+i)(\overline{z}-i) && (z \fallingdotseq -i) \\
\iff& z\overline{z} + zi - \overline{z}i + 1 = z\overline{z} - zi + \overline{z}i + 1 && (z \fallingdotseq -i) \\
\iff& 2(z-\overline{z})i = 0 && (z \fallingdotseq -i) \\
\iff& z - \overline{z} = 0 && (z \fallingdotseq -i)
\end{aligned}
$$

問 3　z が $\left|\dfrac{\sqrt{2}z-1}{z-\sqrt{2}}\right| = 1$ を満たすとき，

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{\sqrt{2}z-1}{z-\sqrt{2}}\right| = 1 \\
\iff& |\sqrt{2}z-1| = |z-\sqrt{2}| && (z \fallingdotseq \sqrt{2}) \\
\iff& (\sqrt{2}z-1)(\sqrt{2}\overline{z}-1) = (z-\sqrt{2})(\overline{z}-\sqrt{2}) && (z \fallingdotseq \sqrt{2}) \\
\iff& 2z\overline{z} - \sqrt{2}z - \sqrt{2}\overline{z} + 1 = z\overline{z} - \sqrt{2}z + \sqrt{2}\overline{z} + 2 && (z \fallingdotseq \sqrt{2}) \\
\iff& z\overline{z} = 1 && (z \fallingdotseq \sqrt{2}) \\
\iff& |z| = 1 && (z \fallingdotseq \sqrt{2})
\end{aligned}
$$

となる。$z = \sqrt{2}$ は $|z| = 1$ を満たさないため，$\left|\dfrac{\sqrt{2}z-1}{z-\sqrt{2}}\right| = 1$ と $|z| = 1$ は同値である。よって，必要十分条件である。(①)

$\boxed{3}$

次の文章を読み，後の問い（問 1〜問 4）の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。
O を原点とする xyz 空間内の点 P の位置ベクトルは，

$$\overrightarrow{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,\ 1,\ 1), \quad \overrightarrow{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,\ 0,\ -1)$$

を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (\cos\theta)\overrightarrow{a} + (\sin\theta)\overrightarrow{b}$ と表される。 θ の値を 0 から 2π まで変化させると，それに応じて P も座標空間内を動く。

問 1　$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 = \boxed{14}$ である。

問 2　$\tan\theta = \dfrac{\sqrt{\boxed{15}}}{\boxed{16}}$ である。

問 3　P から xy 平面に下ろした垂線と xy 平面との交点を P$'$ とする。 $\tan\theta = -\dfrac{\sqrt{\boxed{17}}}{\boxed{18}}$ のとき，PP$'$ 最大値 $\dfrac{\sqrt{\boxed{19}\,\boxed{20}}}{\boxed{21}}$ をとり，このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}'} = \pm\frac{\sqrt{\boxed{22}\,\boxed{23}}}{\boxed{24}\,\boxed{25}}(1,\ \boxed{26}\,\boxed{27},\ 0)$$

である。

問 4　θ の値を 0 から 2π まで変化させたとき，OP$'$ の最小値は $\dfrac{\sqrt{\boxed{28}}}{\boxed{29}}$ である。

解答

問 1

$$|\overrightarrow{a}| = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1^2+1^2+1^2} = 1$$

$$|\overrightarrow{b}| = \frac{1}{\sqrt{2}}\{1^2+0^2+(-1)^2\} = 1$$

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = \frac{1}{\sqrt{6}}\{1\cdot 1+1\cdot 0+1\cdot(-1)\} = 0$$

より

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 &= \cos^2\theta|\overrightarrow{a}|^2 + 2\sin\theta\cos\theta\,\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} + (\sin^2\theta)|\overrightarrow{b}|^2 \\ &= \cos^2\theta + \sin^2\theta \\ &= \mathbf{1}\end{aligned}$$

問 2

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{3}}\cos\theta + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\cos\theta \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\cos\theta - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta \end{pmatrix}$$

であるため，P が xy 平面上にあるのは $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cos\theta - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta = 0$ のとき，つまり

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{3}}$$

のときである。

問 3　$\mathrm{P}'\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cos\theta + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta,\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\cos\theta,\ 0\right)$ であるため，

$$\begin{aligned}\mathrm{PP}' &= \left|\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\theta - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\right| \\ &= \left|\frac{\sqrt{30}}{6}\sin(\theta-\alpha)\right|\end{aligned}$$

ただし，α は $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{6}{\sqrt{30}}$，$\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{6}{\sqrt{30}}$ を満たす鋭角である。

$0 \leqq \theta < 2\pi$，$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ であるため，PP$'$ が最大値を取るのは $\theta = \alpha + \dfrac{\pi}{2}$，$\alpha + \dfrac{3}{2}\pi$ のときである。以下，簡単のため，$\theta = \alpha \pm \dfrac{\pi}{2}$ として計算する。このとき

$$\tan\theta = -\tan\alpha = -\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \boldsymbol{-\frac{\sqrt{6}}{2}}$$

で，最大値は $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{30}}{6}}$ である。

また

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}'} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\left(\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\left(\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\mp\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{6}{\sqrt{30}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{6}{\sqrt{30}}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\mp\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{6}{\sqrt{30}}\right) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\sqrt{30}}{5}\begin{pmatrix} \mp\frac{1}{3} \pm \frac{1}{2} \\ \mp\frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \pm\boldsymbol{\frac{\sqrt{30}}{30}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}}\end{aligned}$$

である。

問 4

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}'}|^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\theta\right)^2$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2}{3}\cos^2\theta + \frac{2}{\sqrt{6}}\sin\theta\cos\theta + \frac{1}{2}\sin^2\theta \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}}\sin 2\theta + \frac{2}{3}\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1-\cos 2\theta}{2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}}\sin 2\theta + \frac{1}{12}\cos 2\theta + \frac{7}{12} \\
&= \frac{5}{12}\sin(2\theta+\beta) + \frac{7}{12}
\end{aligned}
$$

である。ただし $\cos\beta = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}$，$\sin\beta = \dfrac{1}{5}$ である。

$0 \leqq 2\theta < 4\pi$，$0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$ より $|\overrightarrow{\mathrm{OP'}}|^2$ は $2\theta = \dfrac{3}{2}\pi - \beta, \dfrac{7}{2}\pi - \beta$ のとき，最小値 $-\dfrac{5}{12} + \dfrac{7}{12} = \dfrac{1}{6}$ をとる。

よって，$|\overrightarrow{\mathrm{OP'}}|$ の最大値は $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}}{6}}$ である。

$\boxed{4}$

次の文章を読み，後の問い（問 1，2）の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

次の表はある子ども向けイベントの参加者の年齢分布を表している。

年齢	8	9	10	11	12	合計
人数	6	9	2	1	2	20

この 20 人の中から 3 人を無作為に選ぶ。

問 1　選ばれた 3 人のうち少なくとも 1 人は 10 歳である確率は $\dfrac{\boxed{30}\,\boxed{31}}{\boxed{32}\,\boxed{33}}$ である。

問 2　選ばれた 3 人のうち少なくとも 1 人は 10 歳で，かつ 3 人の中に同じ年齢の人が 2 人以上いる確率は

$\dfrac{\boxed{34}\,\boxed{35}}{\boxed{36}\,\boxed{37}\,\boxed{37}}$ である。

$\boxed{\text{解答}}$

問 1　余事象を利用する。

$$\begin{aligned} & 1-(10\text{ 歳の人が選ばれない確率}) \\ &= 1-\frac{{}_{18}\mathrm{C}_3}{{}_{20}\mathrm{C}_3} \\ &= 1-\frac{18\cdot17\cdot16}{20\cdot19\cdot18} \\ &= 1-\frac{68}{95}=\mathbf{\frac{27}{95}} \end{aligned}$$

問 2　10 歳の人が選ばれる人数で場合を分ける。

(i)　10 歳の人が 2 人選ばれる場合

残りの 18 人から 1 人選ぶので，確率は

$$\frac{{}_2\mathrm{C}_2\times{}_{18}\mathrm{C}_1}{{}_{20}\mathrm{C}_3}$$

(ii)　10 歳の人が 1 人のみ選ばれる場合

残り 2 人は同じ年齢の人を選ぶので，確率は

$$\frac{{}_2\mathrm{C}_1({}_6\mathrm{C}_2+{}_9\mathrm{C}_2+{}_2\mathrm{C}_2)}{{}_{20}\mathrm{C}_3}$$

よって，(i)(ii) より，求める確率は

$$\frac{{}_2\mathrm{C}_2\times{}_{18}\mathrm{C}_1}{{}_{20}\mathrm{C}_3}+\frac{{}_2\mathrm{C}_1({}_6\mathrm{C}_2+{}_9\mathrm{C}_2+{}_2\mathrm{C}_2)}{{}_{20}\mathrm{C}_3}=\mathbf{\frac{61}{570}}$$

講評

$\boxed{1}$［整関数の微積分］（標準）：典型的な問題だが，問 2 の面積の最大値の計算の際に，工夫をしないと少し面倒である。

$\boxed{2}$［複素数平面，集合と論理］（やや易）：問 1 の範囲をよく確認する必要があるなど，引っかかりやすい部分があるなど，差がつきそうである。

$\boxed{3}$［空間ベクトル］（標準）：典型的ではあるが，空間座標が苦手な受験生には辛かったかもしれない。問 2 までは解きたい。

$\boxed{4}$［確率］（易）：典型的で易しい問題のため，完答したい。

昨年度と比べて，難易度は同程度だが，論理の問題や空間座標の問題など受験生が苦手とする問題があり，やや解きづらかったかもしれない。一次突破ラインは 65% 程度か。