医学部専門予備校 YMS
医学部進学予備校 メビオ　医学部専門予備校 英進館メビオ 福岡校

解答速報

聖マリアンナ医科大学（後期）　数学

2025年 3月 6日実施

$\boxed{1}$

　年利率 1.875% で 3600 万円を借り入れ，毎年，一定額 x 万円を返済することにした。なお $x>0$ とする。また，自然数 k に対し，k 年後の借り入れ残高を a_k で表すものとし，a_k が $x \leqq 1.01875 \times a_k$ である場合のみ a_{k+1} を考えるものとする。このとき，a_{k+1} は

$$a_{k+1}=1.01875 \times a_k - x\ ,\quad a_1 = 1.01875 \times 3600 - x$$

を満たす。以下の（1），（2）の $\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$ にあてはまる適切な数を解答用紙の所定の欄に記入せよ。

(1)　$a_k = a_{k+1}$ を満たすような x の値は $\boxed{\text{ア}}$ である。

(2)　$a_{20}=0$ を満たすような x の値は $\boxed{\text{イ}}$ である。なお $1.01875^{20}=1.45$ として計算せよ。

解答

(1)　$a_1 = 3600$ と考えればよいので $a_1 = 1.01875 \times 3600 - x$ に代入して

$$3600 = 1.01875 \times 3600 - x$$
$$\Longleftrightarrow x = 3600 \times 0.01875 = \mathbf{67.5}$$

注釈

元本が減らないと考えて 3600 万円の 1 年間の利息を求めると

$$x = 3600 \times 0.01875 = \mathbf{67.5}$$

(2)　$r=1.01875$ とおいて，漸化式を解くと

$$a_{k+1} - \frac{x}{r-1} = r\left(a_k - \frac{x}{r-1}\right)$$
$$\Longleftrightarrow a_k - \frac{x}{r-1} = \left(a_1 - \frac{x}{r-1}\right)r^{k-1}$$
$$\Longleftrightarrow a_k = \left(a_1 - \frac{x}{r-1}\right)r^{k-1} + \frac{x}{r-1}$$

$a_{20}=0$ のとき

$$\left(a_1 - \frac{x}{r-1}\right)r^{19} + \frac{x}{r-1} = 0$$
$$\Longleftrightarrow \left(3600r - x - \frac{x}{r-1}\right)r^{19} + \frac{x}{r-1} = 0$$
$$\Longleftrightarrow \frac{r^{20}-1}{r-1}x = 3600r^{20}$$
$$\Longleftrightarrow x = 3600r^{20} \times \frac{r-1}{r^{20}-1} = 3600 \times 1.45 \times \frac{0.01875}{0.45} = \mathbf{217.5}$$

$\boxed{\text{注釈}}$

$a_0 = 3600$ として漸化式を解くと計算はもう少し楽になる。

$$\begin{aligned}
&a_{k+1} - \frac{x}{r-1} = r\left(a_k - \frac{x}{r-1}\right) \\
\iff &a_k - \frac{x}{r-1} = \left(a_0 - \frac{x}{r-1}\right)r^k \\
\iff &a_k = \left(a_0 - \frac{x}{r-1}\right)r^k + \frac{x}{r-1}
\end{aligned}$$

$a_{20} = 0$ のとき

$$\begin{aligned}
&\left(a_0 - \frac{x}{r-1}\right)r^{20} + \frac{x}{r-1} = 0 \\
\iff &\left(3600 - \frac{x}{r-1}\right)r^{20} + \frac{x}{r-1} = 0 \\
\iff &\frac{r^{20}-1}{r-1}x = 3600r^{20} \\
\iff &x = 3600r^{20} \times \frac{r-1}{r^{20}-1} = 3600 \times 1.45 \times \frac{0.01875}{0.45} = \mathbf{217.5}
\end{aligned}$$

$\boxed{2}$

座標平面において，$x=4\sqrt{3}\sin\theta(1-\cos\theta)$，$y=4\sqrt{3}(2+\cos\theta-\cos^2\theta)$ $(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ と媒介変数表示される曲線を C とする。

以下の (1)〜(3) の $\boxed{\text{ウ}}$〜$\boxed{\text{サ}}$ にあてはまる適切な数を解答用紙の所定の欄に記入せよ。

(1) x の値域を求めると $\boxed{\text{ウ}}\leqq x\leqq\boxed{\text{エ}}$ となる。また，

$$\frac{dx}{d\theta}=-\boxed{\text{オ}}\cos 2\theta+\boxed{\text{カ}}\cos\theta$$

となる。

(2) y の値域を求めると $\boxed{\text{キ}}\leqq x\leqq\boxed{\text{ク}}$ となる。また，

$$\frac{dy}{d\theta}=\boxed{\text{ケ}}\sin 2\theta-\boxed{\text{コ}}\sin\theta$$

となる。

(3) 曲線 C の長さを求めると $\boxed{\text{サ}}$ である。

$\boxed{\text{解答}}$

(1) $x=4\sqrt{3}\sin\theta-4\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta=4\sqrt{3}\sin\theta-2\sqrt{3}\sin 2\theta$ より

$$\frac{dx}{d\theta}=\boldsymbol{-4\sqrt{3}\cos 2\theta+4\sqrt{3}\cos\theta}$$

となる。また，二倍角の公式を用いると

$$\frac{dx}{d\theta}=-4\sqrt{3}(2\cos^2\theta-\cos\theta-1)=-4\sqrt{3}(\cos\theta-1)(2\cos\theta+1)$$

となる。よって，増減表は

θ	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	$\frac{4}{3}\pi$	$\cdots$	2π
$\frac{dx}{d\theta}$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0
x	0	$\nearrow$	9	$\searrow$	-9	$\nearrow$	0

より，$\boldsymbol{-9\leqq x\leqq 9}$ となる。

(2) $y=-4\sqrt{3}\left(\cos\theta-\dfrac{1}{2}\right)^2+9\sqrt{3}$ と変形される。$0\leqq\theta\leqq 2\pi$ より $-1\leqq\cos\theta\leqq 1$ である。

よって，y は $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ つまり $\theta=\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{5}{3}\pi$ のとき最大値 $9\sqrt{3}$ をとり，$\cos\theta=-1$ つまり $\theta=\pi$ のとき最小値 0 をとる。したがって，$\boldsymbol{0\leqq y\leqq 9\sqrt{3}}$ となる。また，半角の公式より

$$y=4\sqrt{3}\left(\frac{3}{2}+\cos\theta-\frac{\cos 2\theta}{2}\right)$$

より

$$\frac{dy}{d\theta}=\boldsymbol{4\sqrt{3}\sin 2\theta-4\sqrt{3}\sin\theta}$$

となる。

(3) 曲線 C の長さを l とする。

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}d\theta$$

である。

$$\begin{aligned}\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 &= 48\{(-\cos 2\theta+\cos\theta)^2+(\sin 2\theta-\sin\theta)^2\}\\ &= 48\{2-2(\cos 2\theta\cos\theta+\sin 2\theta\sin\theta)\}\\ &= 48\{2-2\cos(2\theta-\theta)\} \quad (\because \text{加法定理})\\ &= 48\cdot 2(1-\cos\theta)\\ &= 192\sin^2\frac{\theta}{2}\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}l &= \int_0^{2\pi}\sqrt{192\sin^2\frac{\theta}{2}}d\theta\\ &= \int_0^{2\pi}8\sqrt{3}\sin\frac{\theta}{2}d\theta \quad \left(\because 0 \leqq \frac{\theta}{2} \leqq \pi\right)\\ &= 8\sqrt{3}\left[-2\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi}\\ &= 8\sqrt{3}\cdot 2\{1-(-1)\}\\ &= \mathbf{32\sqrt{3}}\end{aligned}$$

である。

$\boxed{3}$

a，b を実数の定数とし，$(a,\ b) \neq (0,\ 0)$ とする。原点を O を焦点，直線 $2ax+3by=1$ を準線とする放物線を C とする。つまり曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ は直線 $2ax+3by=1$ までの距離と，原点 O までの距離とが等しい点である。以下の (1)〜(3) の $\boxed{\text{シ}}$ 〜 $\boxed{\text{ナ}}$ にあてはまる適切な数または式を解答用紙の所定の欄に記入せよ。

(1) s，t の満たす方程式を a，b を用いて表すと

$$\boxed{\text{シ}}\,s^2-\boxed{\text{ス}}\,st+\boxed{\text{セ}}\,t^2+\boxed{\text{ソ}}\,s+\boxed{\text{タ}}\,t-1=0$$

となる。

(2) $a>0$ とする。曲線 C 上を点 P が動くとき，P の x 座標 s には最大値がある。その最大値を与える点を Q とする。

(i) $b=0$ のとき，Q の座標を a を用いて表すと $\left(\boxed{\text{チ}},\ 0\right)$ となる。

(ii) $b \neq 0$ のとき，Q の座標を a，b を用いて表すと $\left(\boxed{\text{ツ}},\ \boxed{\text{テ}}\right)$ となる。

(3) a，b が $a>0$ かつ $4a^2+9b^2=1$ を満たしつつ動くとき，点 Q の描く軌跡の方程式を $y^2=f(x)$ とすると，関数 $f(x)=\boxed{\text{ト}}$ である。また，点 Q の x 座標の変域は $x \geqq \boxed{\text{ナ}}$ である。

$\boxed{\text{解答}}$

(1) 点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ と直線 $2ax+3by=1$ の距離は

$$\frac{|2as+3bt-1|}{\sqrt{4a^2+9b^2}}$$

である。一方，点 O と点 P の距離は $\sqrt{s^2+t^2}$ であるため，s，t の満たす式は

$$\frac{|2as+3bt-1|}{\sqrt{4a^2+9b^2}}=\sqrt{s^2+t^2}$$

である。辺々に $\sqrt{4a^2+9b^2}$ を掛けて二乗すると

$$4a^2s^2+9b^2t^2+12abst-4as-6bt+1=4a^2s^2+9b^2s^2+4a^2t^2+9b^2t^2$$

となる。整理することで

$$\boldsymbol{9b^2s^2-12abst+4a^2t^2+4as+6bt-1=0} \quad \cdots(*)$$

を得る。

(2) (i) $(*)$ に $b=0$ を代入すると $4a^2t^2+4as-1=0$ を得る。s について解くと $s=-at^2+\dfrac{1}{4a}$ であるため，s は $t=0$ のとき最大値 $\dfrac{1}{4a}$ をとる。ゆえに $\mathrm{Q}\boldsymbol{\left(\dfrac{1}{4a},\ 0\right)}$ となる。

$\boxed{\text{注釈}}$

問題文の式に直接 $b=0$ を代入すると，曲線 C は原点を焦点，$x=\dfrac{1}{2a}$ を準線とする放物線であるため，簡単に分かる。

(ii) 方程式 $(*)$ について，t が実数解をもつ s の範囲を求める。

$(*)$ を t について整理すると

$$4a^2t^2-6(2as-1)bt+9b^2s^2+4as-1=0 \quad \cdots(**)$$

となる。$a>0$ より $4a^2 \neq 0$ なので 2 次方程式となることより，判別式を D とすると，

$$D=9b^2(2as-1)^2-4a^2(9b^2s^2+4as-1)$$

$$
\begin{aligned}
&= 9b^2 - 36ab^2s + 36a^2b^2s^2 - (36a^2b^2s^2 + 16a^3s - 4a^2)\\
&= -16a^3s - 36ab^2s + 4a^2 + 9b^2\\
&= (4a^2+9b^2)(1-4as)
\end{aligned}
$$

である。t が実数解をもつとき $D \geqq 0$ であるため

$$(4a^2+9b^2)(1-4as) \geqq 0$$

$4a^2+9b^2>0$ より $s \leqq \dfrac{1}{4a}$ である。ゆえに s の最大値は $\dfrac{1}{4a}$ である。
これを $(**)$ に代入すると

$$
\begin{aligned}
&4a^2t^2 - 6\left(2a\cdot\frac{1}{4a}-1\right)bt + 9b^2\left(\frac{1}{4a}\right)^2 + 4a\cdot\frac{1}{4a} - 1 = 0\\
\iff\ &4a^2t^2 + 3bt + \frac{9b^2}{16a^2} + 1 - 1 = 0\\
\iff\ &\left(2at+\frac{3b}{4a}\right)^2 = 0
\end{aligned}
$$

より $t = -\dfrac{3b}{8a^2}$ である。ゆえに $\mathrm{Q}\left(\boldsymbol{\dfrac{1}{4a}, -\dfrac{3b}{8a^2}}\right)$ となる。

(3)　(2)(ii) より点 Q の描く軌跡上の点 $(x,\ y)$ は次の条件を満たす。

$$4a^2+9b^2=1 \text{ を満たす実数 } a\ (>0),\ b \text{ が存在して}$$
$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{4a} \\ y = -\dfrac{3b}{8a^2} \end{cases} \quad \text{を満たす}$$

$a,\ b$ を $x,\ y$ で表すと

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{1}{4x}\\
b &= -\frac{8a^2}{3}y = -\frac{y}{6x^2}
\end{aligned}
$$

であるため,

$$4a^2+9b^2=1 \text{ を満たす実数 } a\ (>0),\ b \text{ が存在して}$$
$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{4a} \\ y = -\dfrac{3b}{8a^2} \end{cases} \quad \text{を満たす}$$
$$\iff \quad 4a^2+9b^2=1 \text{ を満たす実数 } a\ (>0),\ b \text{ が存在して}$$
$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{4x} \\ b = -\dfrac{y}{6x^2} \end{cases} \quad \text{を満たす}$$

$a,\ b$ をそれぞれ代入することで

$$4\left(\frac{1}{4x}\right)^2 + 9\left(-\frac{y}{6x^2}\right)^2 = 1$$

$$\iff \frac{1}{4x^2}+\frac{y^2}{4x^4}=1$$
$$\iff y^2=4x^2-x^4$$

となる。よって $f(x)=\boldsymbol{4x^2-x^4}$ である。
また，$a>0$ かつ $4a^2+9b^2=1$ より a の範囲は $0<a\leqq\dfrac{1}{2}$ で，ここに $a=\dfrac{1}{4x}$ を代入し整理することで $\boldsymbol{x\geqq\dfrac{1}{2}}$ を得る。

$\boxed{4}$

微分可能な関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は,

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

で定義される。以下の（1),（2）に対する解答を解答用紙の所定の欄に記入せよ。

(1)　n を正の整数とする。定義にしたがって関数 $f(x)=x^n$ の導関数を求めよ。

(2)　x を 0 でない実数とする。定義にしたがって関数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ の導関数を求めよ。なお $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1$ は用いてよい。

$\boxed{\text{解答}}$

(1)

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left({}_n\mathrm{C}_k\cdot x^{n-k}\cdot h^k\right)-x^n}{h}\quad(\because\ \text{二項定理})\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{x^n+nx^{n-1}h+\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\left({}_n\mathrm{C}_k\cdot x^{n-k}\cdot h^k\right)-x^n}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{nx^{n-1}h+\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\left({}_n\mathrm{C}_k\cdot x^{n-k}\cdot h^k\right)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\left\{nx^{n-1}+\sum_{k=2}^{n}\left({}_n\mathrm{C}_k\cdot x^{n-k}\cdot h^{k-1}\right)\right\}\\
&=\boldsymbol{nx^{n-1}}
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\sin(x+h)}{x+h}-\frac{\sin x}{x}}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{x(\sin x\cos h+\cos x\sin h)-(x+h)\sin x}{hx(x+h)}\quad(\because\ \text{加法定理})\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{x\sin x(\cos h-1)+x\cos x\sin h-h\sin x}{hx(x+h)}\\
&=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{\sin x}{x+h}\cdot\left(-\frac{1-\cos h}{h^2}\right)\cdot h+\frac{\sin h}{h}\cdot\frac{\cos x}{x+h}-\frac{\sin x}{x(x+h)}\right\}\\
&=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{\sin x}{x+h}\cdot\left(\frac{\sin h}{h}\right)^2\cdot\frac{-1}{1+\cos h}\cdot h+\frac{\sin h}{h}\cdot\frac{\cos x}{x+h}-\frac{\sin x}{x(x+h)}\right\}\\
&=\frac{\sin x}{x}\cdot 1^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 0+1\cdot\frac{\cos x}{x}-\frac{\sin x}{x^2}\quad\left(\because\ \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1\right)\\
&=\boldsymbol{\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}}
\end{aligned}$$

講評

$\boxed{1}$ ［数列］（標準）：複利に関する出題であった。(2) はまず $r=1.01875$ などとおいて計算したい。小数の細かい計算がケアレスミスを引き起こす。注意して計算したい。

$\boxed{2}$ ［数III微積分］（標準）：媒介変数表示された曲線に関する出題であった。基本的な三角関数の微積分の問題であるため，ミスなく計算したい。**YMS 生は入試前日の直前講習が大的中した。**

$\boxed{3}$ ［二次曲線・軌跡］（やや難）：準線が軸と平行ではない放物線の計算であった。ほとんどの受験生が経験したことのない問題であっただろう。加えて計算量も多い。

$\boxed{4}$ ［数III微分］（標準）：定義から導関数を計算する問題であった。(1) は必ず解きたい。(2) はやや難しい。ただ受験生は慣れないため，完答するのは難しいのではないか。

昨年度と比べて難化した。全体的に解きにくい問題が多い。比較的簡単な大問 2 は完答したいところ。一次突破ラインは 50% 程度か。