解答速報

昭和大学医学部（Ⅱ期）　数学

2025年 3月 1日実施

$\boxed{1}$

i は虚数単位とする。次の各問いに答えよ。ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

(1)　a, b は実数とする。3 次方程式 $4x^3+ax^2+5x+b=0$ の 1 つの解が $\alpha=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{4}$ であるとし，残りの解を β, γ とする。

(1-1)　実数 a, b の値を求めよ。

(1-2)　$(\beta\gamma)^{2025}$ の値を求めよ。

(2)　a, b は実数とする。$f(x)=x^3+ax^2+bx+3$ について，$y=f(x)$ のグラフは $x=\alpha$, β, γ $(\alpha<\beta<\gamma)$ で x 軸と交わる。また，$f(x)$ は $x=1$ に変曲点をもち，$\alpha+\beta=0$ を満たす。次の各問いに答えよ。

(2-1)　α, β, γ の値を求めよ。

(2-2)　実数 a, b の値を求めよ。

(2-3)　$\displaystyle\int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx$ を求めよ。

解答

(1)(1-1)　与式は実数係数の 3 次方程式なので α と共役な複素数 $\overline{\alpha}=\dfrac{1-i\sqrt{3}}{4}$ は 3 次方程式の解である。(以下の設問で β と γ を区別する必要はないため，これを β とする)

解と係数の関係より

$$\begin{cases} \dfrac{1+i\sqrt{3}}{4}+\dfrac{1-i\sqrt{3}}{4}+\gamma=-\dfrac{a}{4} & \cdots① \\ \dfrac{1+i\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{1-i\sqrt{3}}{4}+\dfrac{1+i\sqrt{3}}{4}\gamma+\dfrac{1-i\sqrt{3}}{4}\gamma=\dfrac{5}{4} & \cdots② \\ \dfrac{1+i\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{1-i\sqrt{3}}{4}\gamma=-\dfrac{b}{4} & \cdots③ \end{cases}$$

② を整理すると

$$\frac{1}{2}\gamma=\frac{5}{4}-\frac{1}{4}=1$$

であるため，$\gamma=2$ である。よって ①, ③ から

$$\begin{aligned} a&=-4\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{4}+\frac{1-i\sqrt{3}}{4}+2\right)\\ &=-4\cdot\frac{5}{2}\\ &=\mathbf{-10} \end{aligned}$$

$$b=\frac{1+i\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1-i\sqrt{3}}{4}\cdot 2\cdot(-4)$$

$$= \mathbf{-2}$$

である。

(1-2)　$\beta\gamma = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{4} \cdot 2 = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2} = \cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$ より，ド・モアブルの定理から

$$\begin{aligned}(\beta\gamma)^{2025} &= \cos\left(-\frac{2025}{3}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{2025}{3}\pi\right)\\ &= \cos(-675\pi) + i\sin(-675\pi)\\ &= \mathbf{-1}\end{aligned}$$

(2)(2-1)　$f(x)$ の変曲点は $x=1$ であるため，$f''(x) = 6x+2a = 0$ は $x=1$ を解に持つ。よって $a=-3$ である。解と係数の関係により

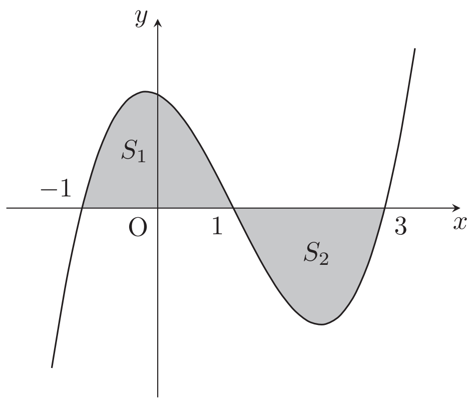
$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma = 3 & \cdots④\\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = b & \cdots⑤\\ \alpha\beta\gamma = -3 & \cdots⑥\end{cases}$$

である。④ に条件 $\alpha+\beta=0$ を代入することで $\gamma = \mathbf{3}$ を得る。

⑥ に代入することで $\alpha\beta = -1$ である。よって，α, β は $t^2-1=0$ の解である。$\alpha < \beta$ に注意して $\alpha = \mathbf{-1}$，$\beta = \mathbf{1}$ である。

(2-2)　(2-1) より $a = \mathbf{-3}$ を得る。⑤ に (2-1) の結果を代入することで $b = -1\cdot1+1\cdot3+3\cdot(-1) = \mathbf{-1}$ である。

(2-3)　$f(x)$ の変曲点は $x=1$ であったため，曲線 $y=f(x)$ は $(1,\ f(1))$ に関して点対称である。ゆえに，対称性から下図の S_1 と S_2 の面積は等しい。



よって

$$\int_{-1}^{3} f(x)dx = \int_{-1}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{3} f(x)dx = S_1 - S_2 = 0$$

$\boxed{2}$

次の各問いに答えよ。ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

(1)　$\tan\alpha = 2,\ \tan\beta = 3,\ \tan\gamma = 4$ とする。このとき $\tan(\alpha+\beta+\gamma)$ の値を求めよ。

(2)　△ABC の 3 つの角 ∠A, ∠B, ∠C の大きさをそれぞれ $A,\ B,\ C$ とする。 $A,\ B,\ C$ について次の等式が成り立つとき，この三角形はどのような形をしているか **句読点を含め 50 文字以内で数式を用いずに簡潔に** 説明せよ。

$$\sin A\sin B\cos B - \sin A\cos B\sin C - \sin B\sin C + 1 = \cos^2 C$$

(3)　次の定積分の値を求めよ。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 3x)(\sin 2x)(\tan x)dx$$

(4)　次の問いに答えよ。

(4-1)　$f(x) = \sin x + \cos x$ について，$y = \{f(x)\}^2$ の値域を不等式で示せ。

(4-2)　a は実数の定数とする。次の方程式を満たす実数 θ が存在するための a の範囲を不等式で表せ。

$$1 + 2\sin\theta\cos\theta - 2a\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) - 6a = 0$$

解答

(1)
$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = -1$$

より

$$\tan(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{\tan(\alpha+\beta) + \tan\gamma}{1 - \tan(\alpha+\beta)\tan\gamma} = \mathbf{\frac{3}{5}}$$

(2)
$$\sin A\sin B\cos B - \sin A\cos B\sin C - \sin B\sin C + 1 = \cos^2 C$$

$$\sin A\sin B\cos B - \sin A\cos B\sin C - \sin B\sin C + 1 - \cos^2 C = 0$$

$$\sin A\sin B\cos B - \sin A\cos B\sin C - \sin B\sin C + \sin^2 C = 0$$

$$\sin A\cos B(\sin B - \sin C) - \sin C(\sin B - \sin C) = 0$$

$$(\sin A\cos B - \sin C)(\sin B - \sin C) = 0$$

$$\therefore\ \sin A\cos B = \sin C \text{ または} \sin B = \sin C$$

(i)　$\sin A\cos B = \sin C$ のとき

$$\sin A\cos B = \sin(\pi - (A+B))$$

$$\sin A\cos B = \sin(A+B)$$

$$\sin A\cos B = \sin A\cos B + \cos A\sin B$$

$$\cos A\sin B = 0$$

$$\cos A = 0 \qquad (\because\ 0 < B < \pi \text{より} \sin B > 0)$$

$$\therefore\ A = \frac{\pi}{2}$$

(ii)　$\sin B = \sin C$ のとき

$$B = C \text{ または } B = \pi - C \qquad (\because\ 0 < B < \pi,\ 0 < C < \pi)$$

$B = \pi - C$ のとき $B + C = \pi$ となり三角形ができないので

$$B = C$$

以上より，△ABC は ∠**A が直角の三角形，または CA と AB の等しい二等辺三角形**

$\boxed{\text{注釈}}$

BC $=a$，CA $=b$，AB $=c$，△ABC の外接円の半径を R として，
(i) のとき，正弦定理と余弦定理により，

$$\frac{a}{2R}\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{c}{2R}\qquad\therefore\ a^2=b^2+c^2$$

(ii) のとき，正弦定理より，$\dfrac{b}{2R}=\dfrac{c}{2R}\qquad\therefore\ b=c$
としてもよい。

(3)

$$\begin{aligned}&\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 3x\sin 2x\tan x dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(4\cos^3 x-3\cos x\right)\cdot 2\sin^2 x dx\\&=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\left\{4\left(1-\sin^2 x\right)-3\right\}\sin^2 x dx\\&=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\left(-4\sin^4 x+\sin^2 x\right)dx\\&=2\left[-\frac{4}{5}\sin^5 x+\frac{1}{3}\sin^3 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=2\left(-\frac{4}{5}+\frac{1}{3}\right)=\boldsymbol{-\frac{14}{15}}\end{aligned}$$

$\boxed{\text{注釈}}$

厳密には広義積分なので，t を十分小さい正の数として
$\displaystyle\lim_{t\to+0}\int_0^{\frac{\pi}{2}-t}\cos 3x\sin 2x\tan x dx$ を計算すべきである。

$\boxed{\text{別解}}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x \sin 2x \tan x dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x \cdot 2\sin^2 x dx$$
$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x \sin x \sin x dx$$
$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(\sin 4x - \sin 2x)\sin x dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 4x \sin x - \sin 2x \sin x) dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{1}{2}(\cos 3x - \cos 5x) - \frac{1}{2}(\cos x - \cos 3x) \right\} dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos 3x - \cos 5x - \cos x) dx$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}\sin 3x - \frac{1}{5}\sin 5x - \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= -\frac{14}{15}$$

(4)(4-1)　$f(x) = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ であるから,

$$\mathbf{0 \leqq \{f(x)\}^2 \leqq 2}$$

(4-2)　$t = \sin\theta + \cos\theta$ とおくと，$-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2}$ であり,

$$t^2 = \sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta$$
$$\therefore\ 2\sin\theta\cos\theta = t^2 - 1$$

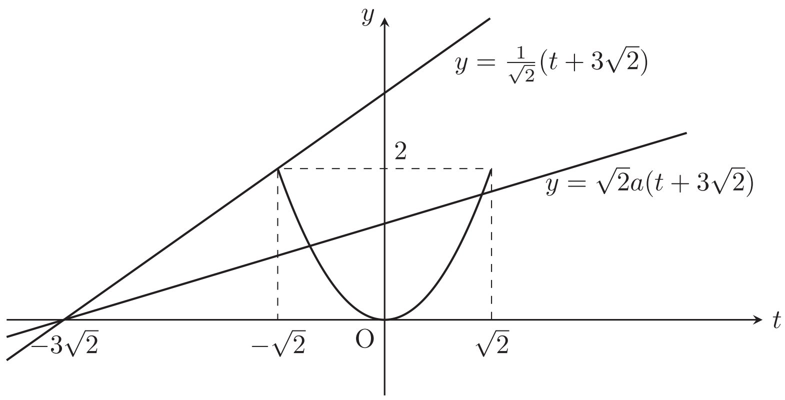
であるから,

$$1 + 2\sin\theta\cos\theta - 2a\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) - 6a = 0$$
$$1 + 2\sin\theta\cos\theta - \sqrt{2}a(\sin\theta + \cos\theta) - 6a = 0$$
$$1 + (t^2 - 1) - \sqrt{2}at - 6a = 0$$
$$\therefore\ t^2 - \sqrt{2}at - 6a = 0$$

となる。

したがって，$t^2 - \sqrt{2}at - 6a = 0$ が $-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2}$ に少なくとも 1 つ解をもつような a の値の範囲を求めればよいが，それには $t^2 = \sqrt{2}a(t + 3\sqrt{2})$ と変形して,

放物線 $y = t^2$ と直線 $y = \sqrt{2}a(t + 3\sqrt{2})$ が $-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2}$ の範囲に共有点をもつ a の値の範囲を求めればよい。



図より条件は，$0 \leqq \sqrt{2}a \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ であるから

$$\boldsymbol{0 \leqq a \leqq \frac{1}{2}}$$

$\boxed{3}$

$a>0$ とする。 $x \geqq 0$ における関数 $f(x)=e^{\sqrt{ax}}$ と，座標平面の曲線 $C: y=f(x)$ について，次の問いに答えよ。ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) C 上の点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{a}, f\left(\dfrac{1}{a}\right)\right)$ における接線 l の方程式を求めよ。また，P を通り l に直交する直線 m の方程式を求めよ。

(2) 曲線 C，直線 $y=1$ および直線 m で囲まれた図形の面積 $S(a)$ を求めよ。また，$a>0$ における $S(a)$ の最小値とそれを与える a の値を求めよ。

解答

(1) $f\left(\dfrac{1}{a}\right)=e$ であり，$f'(x)=\dfrac{\sqrt{a}}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{ax}}$ より，$f'\left(\dfrac{1}{a}\right)=\dfrac{ae}{2}$ である。

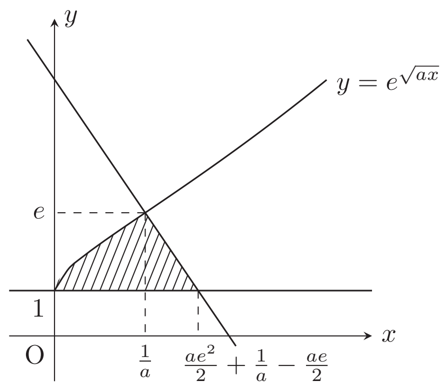
したがって，点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{a},\ e\right)$ における接線の方程式 l は

$$y=\frac{ae}{2}\left(x-\frac{1}{a}\right)+e$$
$$\therefore\ \boldsymbol{y=\frac{ae}{2}x+\frac{e}{2}}$$

また，$ae \neq 0$ より点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{a},\ e\right)$ における法線の方程式 m は

$$y=-\frac{2}{ae}\left(x-\frac{1}{a}\right)+e$$
$$\therefore\ \boldsymbol{y=-\frac{2}{ae}x+\frac{2}{a^2e}+e}$$

(2)



図より求める面積 $S(a)$ は

$$\begin{aligned}S(a)&=\int_0^{\frac{1}{a}}e^{\sqrt{ax}}dx-\frac{1}{a}\cdot 1+\frac{1}{2}\left(\frac{ae^2}{2}-\frac{ae}{2}\right)(e-1)\\&=\frac{2}{a}\int_0^1 te^t dt-\frac{1}{a}+\frac{e(e-1)^2}{4}a\quad(\because\ \sqrt{ax}=t\text{ と置換した})\\&=\frac{2}{a}\Big[(t-1)e^t\Big]_0^1-\frac{1}{a}+\frac{e(e-1)^2}{4}a\quad(\because\ \text{部分積分を用いた})\\&=\boldsymbol{\frac{1}{a}+\frac{e(e-1)^2}{4}a}\end{aligned}$$

$\dfrac{1}{a} > 0,\ \dfrac{e(e-1)^2}{4}a > 0$ より相加平均・相乗平均の関係を用いて

$$\begin{aligned}&\frac{1}{a} + \frac{e(e-1)^2}{4}a \\ \geqq& 2\sqrt{\frac{1}{a}\cdot\frac{e(e-1)^2}{4}a} \\ =&(e-1)\sqrt{e}\end{aligned}$$

等号は $\dfrac{1}{a} = \dfrac{e(e-1)^2}{4}a \iff a = \dfrac{2}{(e-1)\sqrt{e}}$ $(\because a > 0)$ のとき成立する。

よって，求める最小値は $\boldsymbol{(e-1)\sqrt{e}}$ であり，それを与える a の値は $a = \boldsymbol{\dfrac{2}{(e-1)\sqrt{e}}}$ である。

$\boxed{\text{別解}}$

$y = e^{\sqrt{ax}}$，および m の方程式を x について解くとそれぞれ

$$x = \frac{1}{a}(\log y)^2,\ x = -\frac{ae}{2}y + \frac{1}{a} + \frac{ae^2}{2}$$

したがって，求める面積 $S(a)$ は

$$\begin{aligned}S(a) &= \int_1^e \left\{\left(-\frac{ae}{2}y + \frac{1}{a} + \frac{ae^2}{2}\right) - \frac{1}{a}(\log y)^2\right\}dy \\ &= \left[-\frac{ae}{4}y^2 + \left(\frac{1}{a} + \frac{ae^2}{2}\right)y - \frac{1}{a}\{y(\log y)^2 - 2y\log y + 2y\}\right]_1^e \quad (\because \text{部分積分を用いた}) \\ &= -\frac{ae}{4}(e^2-1) + \left(\frac{1}{a} + \frac{ae^2}{2}\right)(e-1) - \frac{1}{a}(e-2) \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{a} + \frac{e(e-1)^2}{4}a}\end{aligned}$$

4

ジョーカーを除く 52 枚 1 組のトランプ（スペード，ハート，クラブ，ダイヤの 4 種の絵柄の 1 つと，1 から 13 の番号の 1 つが，それぞれ重複なく割り当てられた合計 52 枚のカード）がある。この中から無作為に n 枚のカードを選ぶ。 2 枚だけが同じ数字で残りがすべて異なる数字である確率を $p(n)$ とする。ただし $n \geqq 3$ とする。次の各問いに答えよ。ただし，答えは結果の みを解答欄に記入せよ。

(1)　$p(3)$ を求めよ。

(2)　$\dfrac{p(n)}{p(n+1)}$ を求めよ。ただし $3 \leqq n \leqq 13$ とする。

(3)　$p(3)$ と $p(4)$ はどちらが大きいか。適切な不等号を解答欄に記入せよ。

(4)　$p(13)$ と $p(14)$ はどちらが大きいか。適切な不等号を解答欄に記入せよ。

(5)　$p(n)$ が最大となるときの n を求めよ。

解答

(1)　全体は 52 枚から 3 枚取り出す方法で ${}_{52}\mathrm{C}_3$ 通りである。
条件を満たすのは番号が同じカードの番号と絵柄を 2 枚分選んで，残りのカードを選ぶ方法で，
${}_{13}\mathrm{C}_1 \times {}_4\mathrm{C}_2 \times (52-4)$ 通りある。よって，

$$p(3) = \frac{{}_{13}\mathrm{C}_1 \times {}_4\mathrm{C}_2 \times 48}{{}_{52}\mathrm{C}_3} = \frac{13 \cdot 6 \cdot 48}{\frac{52 \cdot 51 \cdot 50}{3 \cdot 2 \cdot 1}} = \boldsymbol{\frac{72}{425}}$$

(2)　全体は 52 枚から n 枚取り出す方法で ${}_{52}\mathrm{C}_n$ 通りである。条件を満たすのは番号が同じカードの番号と絵柄を 2 枚分選んで，残り 12 個の数字から $(n-2)$ 個の数字を選んで各数字から絵柄を選ぶと考え，
${}_{13}\mathrm{C}_1 \times {}_4\mathrm{C}_2 \times 4^{n-2}\,{}_{12}\mathrm{C}_{n-2}$ 通りある。
よって，$p(n) = \dfrac{{}_{13}\mathrm{C}_1 \times {}_4\mathrm{C}_2 \times 4^{n-2}{}_{12}\mathrm{C}_{n-2}}{{}_{52}\mathrm{C}_n}$ より

$$\begin{aligned}
\frac{p(n)}{p(n+1)} &= \frac{{}_{12}\mathrm{C}_{n-2} \times 4^{n-2}}{{}_{52}\mathrm{C}_n} \div \frac{{}_{12}\mathrm{C}_{n-1} \times 4^{n-1}}{{}_{52}\mathrm{C}_{n+1}} \\
&= \left\{ \frac{12!}{(14-n)!(n-2)!} \cdot \frac{52! \times 4^{n-2}}{(51-n)!(n+1)!} \right\} \div \left\{ \frac{12!}{(13-n)!(n-1)!} \cdot \frac{52! \times 4^{n-1}}{(52-n)!n!} \right\} \\
&= \boldsymbol{\frac{(n-1)(52-n)}{4(14-n)(n+1)}}
\end{aligned}$$

(3)　$\dfrac{p(3)}{p(4)} = \dfrac{2 \cdot 49}{4 \cdot 11 \cdot 4} = \dfrac{49}{88} < 1$ より $\boldsymbol{p(3) < p(4)}$ である。

(4)　$\dfrac{p(13)}{p(14)} = \dfrac{12 \cdot 39}{4 \cdot 1 \cdot 14} = \dfrac{117}{14} > 1$ より $\boldsymbol{p(13) > p(14)}$ である。

(5)　$n \geqq 15$ のときは $P(n) = 0$ となることに注意する。
$3 \leqq n \leqq 13$ において，$\dfrac{p(n)}{p(n+1)} < 1$ となるときを調べると，

$$(n-1)(52-n) < 4(14-n)(n+1)$$

$$3n^2 + n < 108$$

これが成り立つのは $n = 3, 4, 5$ のときで，このとき $p(n+1) > p(n)$ となる。同様にして，$n = 6, 7, 8, \cdots, 13$ のとき $p(n+1) < p(n)$ となることがわかる。以上より，$p(3) < p(4) < p(5) < p(6) > p(7) > \cdots > p(14)$ を得て，$p(n)$ が最大となるのは $n = \boldsymbol{6}$ のときである。

講評

$\boxed{1}$［複素数と方程式など］（やや易）：条件から三次関数を決定する問題であった。シンプルであるため完答したい。

$\boxed{2}$［三角関数など］（標準）：三角関数の問題であった。各小問異なるタイプの問題であるが，どれも基礎的である。

$\boxed{3}$［微積分］（標準）：指数関数にまつわる微分・積分の問題であった。文字が多いため，計算ミスには注意したい。

$\boxed{4}$［確率］（標準）：$p(n)/p(n+1)$ の計算を通して，確率の最大値を求める問題であった。丁寧な計算を心がけたい。

昨年度に比べ同程度かやや易化した。どの問題も落ち着いて処理できる問題が多く，差がつきそうなセットである。一次突破ボーダーは 60% 程度か。