解答速報

岩手医科大学医学部　数学

2026年 1月 21日実施

（注）以下は，受験生の聞き取りに基づいた問題の再現と，それに対する解答であるため，実際の入試問題とは相違を含む可能性があります。

Ⅰ

$f(x)=2\cdot 4^{x-1}+2\cdot 4^{-x-1}$ とする。

(1)　$x=$ $\boxed{\text{ア}}$ のとき最小値 $\boxed{\text{イ}}$ である。

(2)　$f(x)=2$ の解は

$$x=\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\log_2\left(\boxed{\text{オ}}\pm\sqrt{\boxed{\text{カ}}}\right)$$

であり，これらの x の値の和は $\boxed{\text{キ}}$ である。

(3)　$f(x)=2\{f(\alpha)\}^2-1$ (αは正の実数) の正の解を a_1 とする。

同様に，自然数 k に対して $f(x)=2\{f(a_k)\}^2-1$ の正の解を a_{k+1} とする。$a_k=\alpha b_k+c_k$ とするとき，

$$b_1=\boxed{\text{ク}},\ c_1=\boxed{\text{ケ}}$$

(4)　(3) のとき，$b_6=$ $\boxed{\text{コサ}}$ であり，$b_k>1000$ となる最小の自然数 k は $k=$ $\boxed{\text{シス}}$ である。

解答・解説

(1)
$$f(x)=\frac{1}{2}\left(4^x+4^{-x}\right)$$

である。

$4^x>0$ および $4^{-x}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の関係を用いると

$$4^x+4^{-x}\geqq 2\sqrt{4^x\cdot 4^{-x}}=2$$

$$f(x)\geqq\frac{1}{2}\cdot 2=1$$

等号成立は $4^x=4^{-x}$ すなわち $x=-x$ より $x=0$。

よって

$x=0$ のとき最小値 1 をとる。

(2)　$f(x)=\dfrac{1}{2}\left(4^x+\dfrac{1}{4^x}\right)=2$ より，

$$4^x+\frac{1}{4^x}=4$$

$t=4^x$ とおくと

$$t + \frac{1}{t} = 4$$

$$t^2 - 4t + 1 = 0$$

$$t = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$4^x = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$2^{2x} = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$2x = \log_2 \left(2 \pm \sqrt{3}\right)$$

$$\therefore \ x = \frac{1}{2} \log_2 \left(2 \pm \sqrt{3}\right)$$

であるから，これらの和は

$$\frac{1}{2}\log_2(2+\sqrt{3}) + \frac{1}{2}\log_2(2-\sqrt{3})$$

$$= \frac{1}{2}\log(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})$$

$$= \frac{1}{2}\log_2 1 = 0$$

(3)　$f(a_{k+1}) = 2\{f(a_k)\}^2 - 1$ より

$$\frac{1}{2}\left(4^{a_{k+1}} + 4^{-a_{k+1}}\right) = 2\left\{\frac{1}{2}\left(4^{a_k} + 4^{-a_k}\right)\right\}^2 - 1$$

$$= \frac{1}{2}\left(4^{2a_k} + 4^{-2a_k} + 2\right) - 1$$

$$= \frac{1}{2}\left(4^{2a_k} + 4^{-2a_k}\right)$$

$$\therefore \ f(a_{k+1}) = f(2a_k)$$

でが成り立つ。

$a_k > 0$，$a_{k+1} > 0$ であり，$y = f(x)$ は $x > 0$ で単調増加であるから

$$a_{k+1} = 2a_k$$

の関係が導かれる。(注)

$a_1 = 2\alpha$ であることも合わせて，

$a_k = \alpha \cdot 2^k$ となるため，$a_k = \alpha b_k + c_k$ と比較して

$$b_k = 2^k,\ c_k = 0$$

である。

よって，$b_1 = 2$，$c_1 = 0$

(注) きちんと方程式を解くと，次のようになる。

$$4^{a_{k+1}} + \frac{1}{4^{a_{k+1}}} = 4^{2a_k} + \frac{1}{4^{2a_k}}$$

$$4^{a_{k+1}} - 4^{2a_k} + \frac{1}{4^{a_{k+1}}} - \frac{1}{4^{2a_k}} = 0$$

$$4^{a_{k+1}} - 4^{2a_k} + \frac{4^{2a_k} - 4^{a_{k+1}}}{4^{a_{k+1}}4^{2a_k}} = 0$$

$$(4^{a_{k+1}} - 4^{2a_k})\left(1 - \frac{1}{4^{a_{k+1}+2a_k}}\right) = 0$$

$4^{a_{k+1}} = 4^{2a_k}$ または $4^{a_{k+1}+2a_k} = 1$

$\therefore\ a_{k+1} = 2a_k$ または $a_{k+1} = -2a_k$　　(注) 終わり

(4)　$b_k = 2^k$ より

$$b_6 = 2^6 = 64$$

また，$b_k > 1000$ を満たす最小の k は $k = 10$　　($\because\ 2^9 = 512,\ 2^{10} = 1024$)

Ⅱ

t を $0 \leqq t \leqq \pi$ を満たす定数とする。関数 $f(x) = 3\sin x + \sin\left(\dfrac{t}{3} - 3x\right)$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{3}\right)$ の最大値を $M(t)$，最小値を $m(t)$ とする。

(1) $f'(x) = 0$ となる $x\left(0 < x < \dfrac{\pi}{3}\right)$ は $x = \dfrac{t}{\boxed{\text{ア}}}$，$\dfrac{t}{\boxed{\text{イウ}}}$ である。

ただし，$\cos A - \cos B = -2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$ であることを用いてよい。

(2) $\sin\dfrac{1}{12}\pi = \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{エ}}} - \sqrt{\boxed{\text{オ}}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である。

(3) $M(t) = \dfrac{\boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}}{\boxed{\text{ケ}}} - \sin\dfrac{t}{\boxed{\text{コ}}}$，$m(t) = \sin\dfrac{t}{\boxed{\text{サ}}}$ である。

(4) $M(t)$ の最大値は $\dfrac{\boxed{\text{シ}}\sqrt{\boxed{\text{ス}}}}{\boxed{\text{セ}}}$，最小値は $\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}$ である。

$m(t)$ の最大値は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{タ}}}}{\boxed{\text{チ}}}$，最小値は $\boxed{\text{ツ}}$ である。

解答・解説

(1) $f(x) = 3\sin x + \sin\left(\dfrac{t}{3} - 3x\right)$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{3},\ 0 \leqq t \leqq \pi\right)$

$$f'(x) = 3\cos x + \cos\left(\frac{t}{3} - 3x\right)\cdot(-3)$$
$$= 3\left\{\cos x - \cos\left(\frac{t}{3} - 3x\right)\right\}$$

和積の公式 $\cos A - \cos B = -2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$ を用いると，

$$f'(x) = 3\left\{-2\sin\left(\frac{x + \frac{t}{3} - 3x}{2}\right)\sin\left(\frac{x - (\frac{t}{3} - 3x)}{2}\right)\right\}$$
$$= -6\sin\left(\frac{t}{6} - x\right)\sin\left(2x - \frac{t}{6}\right)$$

$0 < x < \dfrac{\pi}{3}$ において $f'(x) = 0$ となるのは $\sin\left(\dfrac{t}{6} - x\right) = 0$ または $\sin\left(2x - \dfrac{t}{6}\right) = 0$ のときである。

$0 \leqq t \leqq \pi$ に注意して

$$\frac{t}{6} - x = 0 \iff x = \frac{t}{6}$$
$$2x - \frac{t}{6} = 0 \iff x = \frac{t}{12}$$

(2)
$$\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$
$$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

(3)　x の範囲における $f(x)$ の増減表は以下の通りとなる。

x	0	$\cdots$	$\frac{t}{12}$	$\cdots$	$\frac{t}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(0)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	$f(\frac{\pi}{3})$

$$f(0)=\sin\frac{t}{3}$$

$$f\left(\frac{t}{12}\right)=3\sin\frac{t}{12}+\sin\left(\frac{t}{3}-\frac{3t}{12}\right)=4\sin\frac{t}{12}$$

$$f\left(\frac{t}{6}\right)=3\sin\frac{t}{6}+\sin\left(\frac{t}{3}-\frac{3t}{6}\right)=2\sin\frac{t}{6}$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=3\sin\frac{\pi}{3}+\sin\left(\frac{t}{3}-\pi\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}-\sin\frac{t}{3}$$

$0\leqq t\leqq\pi$ のとき

$$4\sin\frac{t}{12}\leqq 4\sin\frac{\pi}{12}\leqq\sqrt{6}-\sqrt{2}<\sqrt{3}\leqq\frac{3\sqrt{3}}{2}-\sin\frac{\pi}{3}\leqq\frac{3\sqrt{3}}{2}-\sin\frac{t}{3}$$

より，$f\left(\frac{t}{12}\right)<f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ であるから

$$M(t)=f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}-\sin\frac{t}{3}$$

また，

$$2\sin\frac{t}{6}-\sin\frac{t}{3}=2\sin\frac{t}{6}-2\sin\frac{t}{6}\cos\frac{t}{6}=2\sin\frac{t}{6}\left(1-\cos\frac{t}{6}\right)\geqq 0$$

より，$f(0)\leqq f\left(\frac{t}{6}\right)$ であるから

$$m(t)=f(0)=\sin\frac{t}{3}$$

(3)　$0\leqq t\leqq\pi$ のとき，

$M(t)=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}-\sin\dfrac{t}{3}$ は

$t=0$ で最大値 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

$t=\pi$ で最小値 $\sqrt{3}$

をとり

$m(t)=\sin\dfrac{t}{3}$ は

$t=\pi$ で最大値 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$t=0$ で最小値 0

をとる。

$\boxed{\text{III}}$

$\alpha = -3+\sqrt{3}i$，$\beta = -2+\sqrt{3}i$ とする。また，複素数平面において，複素数 z は $|z-\alpha| = \sqrt{2}|z-\beta|$ を満たす図形 C 上にある。

(1) $|\alpha| = \boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}$ であり，偏角 $\arg\alpha$ を $0 \leqq \arg\alpha < 2\pi$ とするとき，$\arg\alpha = \dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\pi$ である。

(2) C は中心 $-\boxed{\text{オ}}+\sqrt{\boxed{\text{カ}}}i$，半径 $\sqrt{\boxed{\text{キ}}}$ の円である。

(3) z が C 上を動くとき，z の偏角 θ のとりうる値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケコ}}}\pi \leqq \theta \leqq \frac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{スセ}}}\pi$$

(4) $|z|$ のとりうる値の範囲は

$$\boxed{\text{ソ}} - \sqrt{\boxed{\text{タ}}} \leqq |z| \leqq \boxed{\text{チ}} + \sqrt{\boxed{\text{ツ}}}$$

解答・解説

(1) $|\alpha| = \sqrt{(-3)^2+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ である。

また，$\alpha = 2\sqrt{3}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)$ より，

偏角 $\arg\alpha$ を $0 \leqq \arg\alpha < 2\pi$ とすると，$\arg\alpha = \dfrac{5}{6}\pi$ である。

(2) $|z-\alpha| = \sqrt{2}|z-\beta|$ の両辺を 2 乗すると，

$$|z-\alpha|^2 = 2|z-\beta|^2$$

$$(z-\alpha)(\overline{z}-\overline{\alpha}) = 2(z-\beta)(\overline{z}-\overline{\beta})$$

$$z\overline{z}-\overline{\alpha}z-\alpha\overline{z}+\alpha\overline{\alpha} = 2(z\overline{z}-\overline{\beta}z-\beta\overline{z}+\beta\overline{\beta})$$

$$z\overline{z}-(2\overline{\beta}-\overline{\alpha})z-(2\beta-\alpha)\overline{z}+2|\beta|^2-|\alpha|^2 = 0$$

$$z\overline{z}-(-1-\sqrt{3}i)z-(-1+\sqrt{3}i)\overline{z}+2 = 0$$

$$\therefore\ |z-(-1+\sqrt{3}i)|^2 = 2$$

よって，C は中心 $-1+\sqrt{3}i$，半径 $\sqrt{2}$ の円である。

別解

アポロニウスの円である。$|z-\alpha| : |z-\beta| = \sqrt{2} : 1$ なので，点 α，点 β を結ぶ線分を $\sqrt{2} : 1$ に内分する点，外分する点をそれぞれ求めると

$$\frac{\alpha+\sqrt{2}\beta}{\sqrt{2}+1} = (\sqrt{2}-1)\alpha+\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)\beta = -1-\sqrt{2}+\sqrt{3}i$$

$$\frac{-\alpha+\sqrt{2}\beta}{\sqrt{2}-1} = -(\sqrt{2}+1)\alpha+\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)\beta = -1+\sqrt{2}+\sqrt{3}i$$

となる。C はこれらを結ぶ線分を直径とする円になるので，C は中心 $-1+\sqrt{3}i$，半径 $\sqrt{2}$ の円である。

(3) 円 C の中心 $\mathrm{P}(-1,\ \sqrt{3})$ の原点からの距離は $\mathrm{OP}=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$ である。

円の半径は $r=\sqrt{2}$ である。

原点 O から円 C に引いた接点と中心 P がなす角を ϕ とすると,

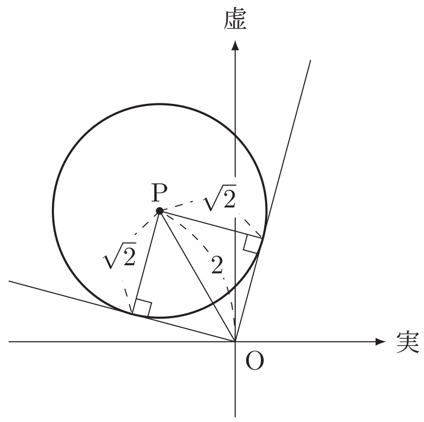
$$\sin\phi=\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ より } \phi=\frac{\pi}{4}$$

となる。

中心 P の偏角は $\frac{2}{3}\pi$ なので，偏角 θ の範囲は

$$\frac{2}{3}\pi-\frac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\frac{2}{3}\pi+\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore\ \frac{5}{12}\pi\leqq\theta\leqq\frac{11}{12}\pi$$



(4) 原点 O と中心 P の距離 $\mathrm{OP}=2$ および半径 $r=\sqrt{2}$ より,

$$\mathrm{OP}-r\leqq|z|\leqq\mathrm{OP}+r$$

$$\therefore\ 2-\sqrt{2}\leqq|z|\leqq2+\sqrt{2}$$

である。

講評

Ⅰ［指数対数，数列，方程式］（標準）

(1)(2) は $4^x = t$ と置き換えるタイプの典型題であり，落とせない．(3) は題意をとりにくいと感じた受験生も多いと思われるが，$2\{f(\alpha)\}^2 - 1$ を展開して整理することで様子が見えてくる．そこが突破できれば，マーク形式ゆえに解答枠を埋めやすかっただろう．

Ⅱ（標準）

2 変数を含む関数の最大最小を調べる問題．本来は極値や端点の関数値の比較が必要となるのだが，枠の形で答が決まってしまう面があったようである．また，和積の公式が問題文に与えられているなど，手厚い出題になっている．この問題は完答したいところ．

Ⅲ［複素数平面］（やや易）

アポロニウスの円を題材とした図形の問題．前半は典型処理であり慎重に解ききりたい．後半も，有名角への意識をしっかりもって完答することが望まれる．

2025 年度と比較すると易化している．ここ数年は，かつての分量の多さや難度の高さと比較すると徐々に穏やかな出題になりつつあったが，今回はそれがさらに進んでだいぶ得点しやすいセットとなっている．とりこぼしを最小限に抑えて高得点をねらいたい．目標は 85%.