東北医科薬科大学　数学

2026年 1月 24日実施

[I]

$g(x)$ は x^3 の係数が 1 の 3 次多項式, $f(x)=g(x)e^x$ とする。座標平面上で曲線 $C: y=f(x)$ が, 次の 2 つの条件 (i), (ii) を満たすとき, 以下の問に答えなさい。

(i)　$f(x)$ は $x=3$ のとき，極小値 0 をとる。
(ii)　点 $(a,\ 0)$ は曲線 C の変曲点である。ただし，$a \fallingdotseq 3$ である。

(1)(1-1)　$a=\boxed{\text{ア}}$ である。

(1-2)　曲線 C の点 $(a,0)$ 以外の変曲点の x 座標は $\pm\sqrt{\boxed{\text{イ}}}$ である。

(1-3)　$g(x)=x^3-\boxed{\text{ウ}}x^2+\boxed{\text{エオ}}x-\boxed{\text{カ}}$ である。

(2)(2-1)　$f(x)$ は, $x=3$ のとき以外に, $x=\boxed{\text{キク}}$ のとき極小値をとり, その極小値は $-\boxed{\text{ケコ}}e^{\boxed{\text{サシ}}}$ である。

(2-2)　$f(x)$ の極大値は $e^{\boxed{\text{ス}}}$ である。

(3)　曲線 C と x 軸で囲まれた図形の面積は $\boxed{\text{セ}}e\left(\boxed{\text{ソ}}-e^{\boxed{\text{タ}}}\right)$ である。

解答

(1)　$f(x)$ を微分すると

$$f'(x)=g'(x)e^x+g(x)(e^x)'$$
$$=\{g'(x)+g(x)\}e^x$$

となる。さらに微分して

$$f''(x)=\{g''(x)+2g'(x)+g(x)\}e^x$$

となる。

(1-1)　条件より $f(3)=0,\ f'(3)=0$ である。$e^3 \fallingdotseq 0$ より $g(3)=0,\ g(3)+g'(3)=0$ となる。
よって $g(3)=g'(3)=0$ となる。さらに，$g(a)=0$ であるため，因数定理より

$$g(x)=(x-3)^2(x-a)$$

と表される。ただし，条件より x^3 の係数は 1 であることに注意する。

$(a,\ 0)$ は曲線 C の変曲点であるため，$f''(a)=0$ である。よって

$$0=f''(a)=\{g''(a)+2g'(a)+g(a)\}e^a$$

$e^a \fallingdotseq 0$ より

$$g''(a)+2g'(a)+g(a)=0$$

積の微分を利用すると

$$\begin{aligned} g'(x)&=2(x-a)(x-3)+(x-3)^2 \\ g''(x)&=2(x-3)+2(x-a)+2(x-3) \\ &=4(x-3)+2(x-a) \end{aligned}$$

であるため,

$$\begin{aligned} g''(a)+2g'(a)+g(a)&=2(a-3)^2+4(a-3) \\ &=2(a-3)(a-3+2) \\ &=2(a-3)(a-1) \end{aligned}$$

となる。$a \fallingdotseq 3$ であるため，$2(a-3)(a-1)=0$ となるのは $\boldsymbol{a=1}$ のときである。

(1-2)　$a=1$ を代入すると

$$g(x)=(x-1)(x-3)^2=x^3-7x^2+15x-9$$

となる。よって

$$\begin{aligned} g''(x)+2g'(x)+g(x)&=(6x-14)+2(3x^2-14x+15)+(x^3-7x^2+15x-9) \\ &=x^3-x^2-7x+7 \\ &=(x-1)(x^2-7) \end{aligned}$$

である。したがって $f''(x)=0$ となるのは，$x=1,\ \boldsymbol{\pm\sqrt{7}}$ である。

(1-3)　前問より $\boldsymbol{x^3-7x^2+15x-9}$ である。

(2)　$f'(x)=\{g'(x)+g(x)\}e^x$ で $e^x>0$ であるため，$f'(x)$ の正負を調べるには，$g'(x)+g(x)$ の増減を調べればよい。$g'(x)+g(x)=x^3-4x^2+x+6$ で，これを $x-3$ で割った商は x^2-x-2 になる。
よって，増減表は

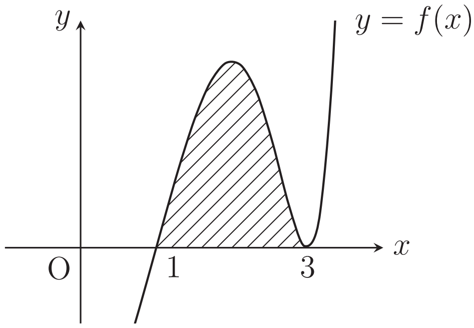
x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

となる。

(2-1)　増減表より $x=\boldsymbol{-1}$ のとき，極小値 $f(-1)=(-1-3)^2(-1-1)e^{-1}=\boldsymbol{-32e^{-1}}$ をとる。

(2-2)　増減表より $x=2$ のとき，極大値 $f(2)=(2-3)^2(2-1)e^2=\boldsymbol{e^2}$ をとる。

(3)　増減表からグラフは次のようになる。



求める面積を S とおくと

$$S=\int_1^3 f(x)\ dx=\int_1^3 (x-3)^2(x-1)e^x\ dx$$

となる。部分積分で計算すると

$$\begin{aligned}
S&=\Big[(x-3)^2(x-1)e^x\Big]_1^3-\int_1^3\{2(x-3)^2+(x-3)(x-1)\}e^x\ dx\\
&=-\Big[\{(x-3)^2+2(x-1)(x-3)\}e^x\Big]_1^3+\int_1^3\{4(x-3)+2(x-1)\}e^x\ dx\\
&=4e+\Big[\{4(x-3)+2(x-1)\}e^x\Big]_1^3-6\int_1^3 e^x\ dx\\
&=4e+4e^3+8e-6e^3+6e\\
&=18e-2e^3\\
&=\boldsymbol{2e(9-e^2)}
\end{aligned}$$

注釈

$g(x)$ を展開してもよいが，$(x-1)(x-3)^2$ の形にしておけば，$x=1,\ 3$ を代入する際に計算しやすい。

[II]

次のように定義される数列 $\{a_n\}$ を考える。以下の問に答えなさい。

$$\begin{cases} a_1 = 3, \\ a_{n+1} = a_n + \dfrac{n(n+1)}{3^n} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots). \end{cases}$$

(1)　次の等式はすべての整数 n について成立する恒等式であるとする。ただし, p は整数の定数とする。

$$n(n+p) = \frac{1}{2}\Big\{3(n+1)(n+1+q) - (n+2)(n+2+q) + r\Big\}$$

このとき, 定数 q, r を p を用いて表すと $q = p - \boxed{\text{オ}}$, $r = -p + \boxed{\text{カ}}$ となる。

(2)(2-1)　数列 $\{a_n\}$ の第 5 項 a_5 は, $a_5 = \dfrac{\boxed{\text{ウエオ}}}{\boxed{\text{カキ}}}$ である。

(2-2)　$\{a_n\}$ の一般項 a_n は,

$$a_n = \frac{1}{\boxed{\text{ク}}}\left\{\boxed{\text{ケコ}} - \frac{\boxed{\text{サ}}(n+\boxed{\text{シ}})^{\boxed{\text{ス}}} + 1}{3^{n-\boxed{\text{セ}}}}\right\}$$

である。

(3)　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする。

(3-1)　$S_n = \dfrac{1}{\boxed{\text{ソ}}}\left\{\boxed{\text{タチ}}n - \boxed{\text{ツテ}} + \dfrac{\boxed{\text{ト}}n^2 + \boxed{\text{ナニ}}n + \boxed{\text{ヌネ}}}{3^{n-\boxed{\text{ノ}}}}\right\}$ である。

(3-2)　$S_n > 2026$ を満たす最小の自然数 n は $\boxed{\text{ハヒフ}}$ である。

解答

(1)　与式を n について整理すると

$$n^2 + pn = n^2 + (q+1)n + \frac{q+r-1}{2}$$

これがすべての整数 n について成立するので，係数を比較して

$$p = q+1, \text{ かつ } 0 = \frac{q+r-1}{2}$$

よって

$$q = \boldsymbol{p-1}, \text{ かつ } r = \boldsymbol{-p+2}$$

(2)

(2-1)(2-2)　与えれた漸化式より，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k(k+1)}{3^k}$$

ここで，(1) において，$p=1$ とすると，$q=0$, $r=1$ であるので，(1) 式は

$$n(n+1) = \frac{1}{2}\left\{3(n+1)^2 - (n+2)^2 + 1\right\}$$

したがって

$$\begin{aligned}\frac{k(k+1)}{3^k} &= \frac{1}{3^k}\cdot\frac{1}{2}\left\{3(k+1)^2-(k+2)^2+1\right\}\\ &= \frac{1}{2}\left\{\frac{(k+1)^2}{3^{k-1}}-\frac{(k+2)^2}{3^k}+\frac{1}{3^k}\right\}\end{aligned}$$

であるので，$f(k)=\dfrac{(k+1)^2}{3^{k-1}}$ とすると，$\dfrac{k(k+1)}{3^k}=\dfrac{1}{2}\left\{f(k)-f(k+1)+\dfrac{1}{3^k}\right\}$ より

$$\begin{aligned}a_n &= a_1+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\left\{f(k)-f(k+1)+\frac{1}{3^k}\right\}\\ &= 3+\frac{1}{2}\left\{f(1)-f(n)+\frac{1}{3}\cdot\frac{1-(\frac{1}{3})^{n-1}}{1-\frac{1}{3}}\right\}\\ &= \frac{21}{4}-\frac{2(n+1)^2+1}{4\cdot 3^{n-1}}\\ &= \frac{1}{4}\left\{21-\frac{2(n+1)^2+1}{3^{n-1}}\right\}\end{aligned}$$

$n=1$ とすると，$\dfrac{1}{4}\left\{21-\dfrac{2\cdot 2^2+1}{3^0}\right\}=3$ となり，$a_1=3$ より，このときも成り立つ。

よって，

$$a_5=\frac{1}{4}\left\{21-\frac{2\cdot 6^2+1}{3^4}\right\}=\boldsymbol{\frac{407}{81}}$$

$$a_n=\boldsymbol{\frac{1}{4}\left\{21-\frac{2(n+1)^2+1}{3^{n-1}}\right\}}$$

(3)(3-1)

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{21}{4}-\frac{1}{4}\cdot\frac{2(k+1)^2+1}{3^{k-1}}\right\}$$

$$4S_n=\sum_{k=1}^{n}\left\{21-\frac{2(k+1)^2+1}{3^{k-1}}\right\}$$

ここで，(1) において，$p=0$ とすると，$q=-1$，$r=2$ であるので，(1) 式は

$$n^2=\frac{1}{2}\left\{3(n+1)n-(n+2)(n+1)+2\right\}$$

$$(n+1)^2=\frac{1}{2}\left\{3(n+2)(n+1)-(n+3)(n+2)+2\right\}$$

したがって

$$\begin{aligned}\frac{(k+1)^2}{3^{k-1}} &= \frac{1}{3^{k-1}}\cdot\frac{1}{2}\left\{3(k+2)(k+1)-(k+3)(k+2)+2\right\}\\ &= \frac{1}{2}\left\{\frac{(k+2)(k+1)}{3^{k-2}}-\frac{(k+3)(k+2)}{3^{k-1}}+\frac{2}{3^{k-1}}\right\}\end{aligned}$$

であるので，$g(k)=\dfrac{(k+2)(k+1)}{3^{k-2}}$ とすると，$\dfrac{(k+1)^2}{3^{k-1}}=\dfrac{1}{2}\left\{g(k)-g(k+1)+\dfrac{2}{3^{k-1}}\right\}$ より

$$\begin{aligned}4S_n&=\sum_{k=1}^{n}\left\{21-2\cdot\frac{(k+1)^2}{3^{k-1}}-\frac{1}{3^{k-1}}\right\}\\&=21n-\sum_{k=1}^{n}\left\{g(k)-g(k+1)-\frac{3}{3^{k-1}}\right\}\\&=21n-\{g(1)-g(n+1)\}-3\cdot\frac{1-(\frac{1}{3})^n}{1-\frac{1}{3}}\\&=21n-18+\frac{(n+3)(n+2)}{3^{n-1}}-\frac{9}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\\&=\frac{1}{2}\left\{42n-45+\frac{2n^2+10n+15}{3^{n-1}}\right\}\end{aligned}$$

よって

$$S_n=\boldsymbol{\frac{1}{8}\left\{42n-45+\frac{2n^2+10n+15}{3^{n-1}}\right\}}$$

(3-2)　$S_n>2026$ のとき

$$42n-45+\frac{2n^2+10n+15}{3^{n-1}}>16208$$

n が十分に大きいとき，$0<\dfrac{2n^2+10n+15}{3^{n-1}}\ll 1$ であるので，まず

$$42n-45>16208$$

を考えて

$$n>386.97\cdots$$

ここで，$n=386,\ 387$ のとき，それぞれ

$$42n-45=16167,\ 16209$$

であり，$n\geqq 6$ のとき，$0<\dfrac{2n^2+10n+15}{3^{n-1}}<1$ より

$$42n-45+\frac{2n^2+10n+15}{3^{n-1}}>16208$$

を満たす最小の自然数 n は $n=\mathbf{387}$ であると言える。

[III]

正の整数全体の集合から重複を許して 1 個ずつ順に合計 K 個の数 $n_1,\ n_2,\ n_3,\ \cdots,\ n_K$
$\big(j$ 番目にとり出した数を n_jとする $(1 \leqq j \leqq K)\big)$ を

$$\text{条件 (i)} \quad n_1+n_2+\cdots+n_K=100$$

を満たすようにとり出し，その組 $\{n_1,\ n_2,\ n_3,\ \cdots,\ n_K\}$ や順列 $(n_1,\ n_2,\ n_3,\ \cdots,\ n_K)$ を考える。例えば，$K=2$ のとき，$n_1+n_2=100$ を満たす 2 個の正の整数 $n_1,\ n_2$ を考えると，順序を考慮しなければ，組 $\{n_1, n_2\}$ は $\{1,\ 99\},\ \{2,\ 98\},\ \{3,\ 97\}\ \cdots, \{50,\ 50\}$ の 50 通りである。一方，順序を考慮すると順列 $(n_1,\ n_2)$ は $(1,\ 99),\ (2,\ 98),\ (3,\ 97),\ \cdots,\ (49,\ 51),\ (50,\ 50),\ (51,\ 49),\ \cdots,\ (99,\ 1)$ の 99 通りである。
このとき，以下の問に答えなさい。

(1)　$K=4$ とする。$n_1,\ n_2,\ n_3,\ n_4$ が，条件 (i) に加え，さらに $|n_i-n_j| \leqq 3\ (1 \leqq i < j \leqq 4)$ を満たすようにとり出すとき，

(1-1)　このような，組 $\{n_1,\ n_2,\ n_3,\ n_4\}$ の総数は $\boxed{\text{ア}}$ 通りである。

(1-2)　このような，順列（ $n_1,\ n_2,\ n_3,\ n_4$ ）の総数は $\boxed{\text{イウ}}$ 通りである。

(2)　$K=5$ とする。$n_1,\ n_2,\ n_3,\ n_4,\ n_5$ が，条件 (i) に加え，さらに $|n_i-n_j| \leqq 3\ (1 \leqq i < j \leqq 5)$ を満たすようにとり出すとき，

(2-1)　このような，組 $\{n_1,\ n_2,\ n_3,\ n_4,\ n_5\}$ の総数は $\boxed{\text{エ}}$ 通りである。

(2-2)　このような，順列 $(n_1,\ n_2,\ n_3,\ n_4,\ n_5)$ の総数は $\boxed{\text{オカキ}}$ 通りである。

(3)　$K=5$ とする。$n_1,\ n_2,\ n_3,\ n_4,\ n_5$ が，条件 (i) に加え，さらに $|n_{i+1}-n_i| \leqq 1\ (1 \leqq i \leqq 4)$ を満たすようにとり出すとき，このような，順列 $(n_1\ n_2,\ n_3,\ n_4,\ n_5)$ の総数は $\boxed{\text{クケ}}$ 通りである。

解答

$n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_k$ のうち，最小のものを m、最大のものを M とする。

(1)　条件より

$$\begin{cases} n_1+n_2+n_3+n_4=100 & \cdots\cdots① \\ |n_i-n_j| \leqq 3\ \ (1 \leqq i < j \leqq 4) & \cdots\cdots② \end{cases}$$

②より，最大値 M と最小値 m の差は 3 以下，つまり

$$M-m \leqq 3\ \cdots\cdots③$$

でなければならない。

また，①より

$$4m \leqq 100 \leqq 4M$$

$$\therefore\ m \leqq 25 \leqq M$$

でなければならないので，

③も考えると m のとり得る値は 25, 24, 23 に限定される。以下，これを踏まえて組み合わせ，順列を考える。

(1-1)　$m=23,\ 24,\ 25$ と $M-m \leqq 3$ を満たす組み合わせ $\{n_1,\ n_2,\ n_3,\ n_4\}$ を
$M-m=0,\ 1,\ 2,\ 3$ で分けて列挙すると

$\{25,\ 25,\ 25,\ 25\}$

$\{24,\ 25,\ 25,\ 26\}$

$\{24,\ 24,\ 26,\ 26\}$

$\{24,\ 24,\ 25,\ 27\}$

$\{23,\ 25,\ 26,\ 26\}$

の **5 通り** である。

(1-2)　(1-1) で求めた各組み合わせを並べ替えた順列 $(n_1,\ n_2,\ n_3,\ n_4)$ の総数を計算する。

(ア) $\{25,\ 25,\ 25,\ 25\}$　1 通り
(イ) $\{24,\ 25,\ 25,\ 26\}$　$\dfrac{4!}{2!}=12$ 通り
(ウ) $\{24,\ 24,\ 26,\ 26\}$　$\dfrac{4!}{2!2!}=6$ 通り
(エ) $\{24\ 24,\ 25,\ 27\}$　$\dfrac{4!}{2!}=12$ 通り
(オ) $\{23,\ 25,\ 26,\ 26\}$　$\dfrac{4!}{2!}=12$ 通り

これらを合計して，$1+12+6+12+12=\mathbf{43}$ **通り** である。

(2)　条件より

$$\begin{cases} n_1+n_2+n_3+n_4+n_5=100 & \cdots\cdots④ \\ |n_i-n_j|\leqq 3\ \ (1\leqq i<j\leqq 5) & \cdots\cdots⑤ \end{cases}$$

④より，最大値 M と最小値 m の差は 3 以下，つまり

$$M-m\leqq 3\ \cdots\cdots⑥$$

でなければならない。

また，④より

$$5m\leqq 100\leqq 5M$$

$$\therefore\ \ m\leqq 20\leqq M$$

でなければならないので，

⑥も考えると m のとり得る値は 20, 19, 18 に限定される。以下，これを踏まえて組み合わせ，順列を考える。

(2-1)　$m=20,\ 19,\ 18,\ M-m\leqq 3$ を満たす組み合わせ $\{n_1,\ n_2,\ n_3,\ n_4,\ n_5\}$ を

$M-m=0,\ 1,\ 2,\ 3$ で分けて列挙すると

$\{20,\ 20,\ 20,\ 20,\ 20\}$

$\{19,\ 20,\ 20,\ 20,\ 21\}$

$\{19,\ 19,\ 20,\ 21,\ 21\}$

$\{18,\ 20,\ 20,\ 21,\ 21\}$

$\{19,\ 19,\ 20,\ 20,\ 22\}$

$\{18,\ 19,\ 21,\ 21,\ 21\}$

$\{19,\ 19,\ 19,\ 21,\ 22\}$

の **7** 通り である。

(2-2)　(2-1) で求めた各組み合わせを並べ替えた順列 $(n_1,\ n_2,\ n_3,\ n_4)$ の総数を計算する。

(ア) $\{20,\ 20,\ 20,\ 20,\ 20\}$　1 通り

(イ) $\{19,\ 20,\ 20,\ 20,\ 21\}$　$\dfrac{5!}{3!}=20$ 通り

(ウ) $\{19,\ 19,\ 20,\ 21,\ 21\}$　$\dfrac{5!}{2!2!}=30$ 通り

(エ) $\{18,\ 20,\ 20,\ 21,\ 21\}$　$\dfrac{5!}{2!2!}=30$ 通り

(オ) $\{19,\ 19,\ 20,\ 20,\ 22\}$　$\dfrac{5!}{2!2!}=30$ 通り

(カ) $\{18,\ 19,\ 21,\ 21,\ 21\}$　$\dfrac{5!}{3!}=20$ 通り

(キ) $\{19,\ 19,\ 19,\ 21,\ 22\}$　$\dfrac{5!}{3!}=20$ 通り

これらを合計して，$1+20+30+30+30+20+20=\mathbf{151}$ 通り である。

(3)　$n_1+n_2+n_3+n_4+n_5=100$ を満たす順列 $(n_1,\ n_2,\ n_3,\ n_4,\ n_5)$ のうち，
隣り合う数の差が 1 以下のものを考える。
ここで，$n_i-20=x_i$ とおき，条件を

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0 \\ |x_i-x_j| \leqq 3 \ \ (1 \leqq i < j \leqq 5) \end{cases}$$

と書き換えて考える。
この場合，5 数の和が 0 で，隣り合う数の差は 1 であるから，
5 数の中には必ず 0 が含まれることに注意する。

(ア)　5 つの数がすべて等しい場合
組み合わせは $\{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\}$ のみであり，
それを並べた順列も 1 通りである。

(イ)　3 種類の数が含まれる場合
含まれる数は $1,\ -1,\ 0$ である。

(イ-1)　1 と -1 が 1 つずつ含まれる場合
組み合わせは $\{1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0\}$ であり，
これを並べる順列 $\left(\dfrac{5!}{3!}\text{通り}\right)$ のうち，1 と -1 が隣り合う場合 $\left(\dfrac{4!}{3!}\times 2\text{ 通り}\right)$ を除いて

$$\frac{5!}{3!}-\frac{4!}{3!}\times 2=12\text{ 通り}$$

(イ-2)　1 が 2 個，-1 が 2 個含まれる場合
組み合わせは $\{1,\ 1,\ -1,\ -1,\ 0\}$ であり，
これを並べる順列のうち，条件を満たすものは

$(1,\ 1,\ 0,\ -1,\ -1)$

$(-1,\ -1,\ 0,\ 1,\ 1)$

の 2 通り

(ウ)　5 つの数がすべて異なる場合

組み合わせは $\{2,\ 1,\ 0,\ -1,\ -2\}$ であるから
これを並べる順列のうち，条件を満たすものは

$$(2,\ 1,\ 0,\ -1,\ -2)$$

$$(-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2)$$

の 2 通り

これらを合計して，$1+12+2+2=\mathbf{17}$ 通り である。

講評

［I］［数 III 微積分］(やや難)：整関数 × 指数関数の微積分に関する出題であった。与えられた条件から工夫して計算しないとかなり面倒である。条件をうまく立式したい。

［II］［数列］（やや難）：階差型の和に関する出題であった。(1) の誘導の意味を理解して，(2)(3) ともに $\sum\{f(k)-f(k+1)\}$ を作って計算する。ただし，その計算もやや重めであるので，注意深く解き進めたい。

［III］［場合の数］（やや難）：組み合わせ，順列に関する出題であった。(1)〜(3) 全てが組み合わせが重要な問題である。(3) の順列はあれこれ考えずに樹形図を用いるのがよいだろう。

昨年度に比べると難化した。一つ一つの問題が重いものが多い。何とか得点をかき集めたい。一次突破ボーダーは 50% 弱程度か。