

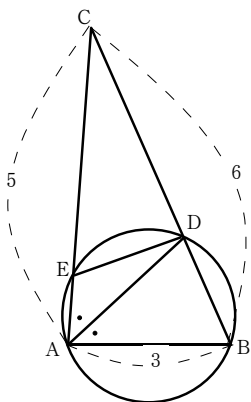
1

$AB = 3$, $BC = 6$, $CA = 5$ である $\triangle ABC$ において, $\angle A$ の二等分線と辺 BC との交点を D とする. また, $\triangle ABD$ の外接円と辺 AC の交点のうち, A と異なる点を E とし, $\triangle ABC$ と $\triangle ADE$ の面積をそれぞれ S_1 , S_2 とする. このとき, $CD = \frac{\text{アイ}}{\text{ウ}}$ であり, $\frac{S_2}{S_1} = \frac{\text{エ}}{\text{オカ}}$ である.

解答

(前半) $\frac{15}{4}$ (後半) $\frac{1}{16}$

解説



AD は $\angle A$ の二等分線だから

$$CD : DB = AC : AB = 5 : 3$$

であるから

$$CD = \frac{5}{8}BC = \frac{15}{4}$$

方べきの定理より

$$CD \cdot CB = CE \cdot CA$$

$$\frac{15}{4} \cdot 6 = CE \cdot 5 \quad \therefore CE = \frac{9}{2}$$

したがって, $EA = CA - CE = \frac{1}{2}$ であるから

$$CA : EA = 5 : \frac{1}{2} = 10 : 1$$

よって,

$$\begin{aligned} \triangle ADE &= \frac{1}{10} \triangle ADC \\ &= \frac{1}{10} \cdot \frac{5}{8} \triangle ABC \\ &= \frac{1}{16} \triangle ABC \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{S_2}{S_1} = \frac{1}{16}$$