解答速報

東京慈恵会医科大学　数学

2026年 2月 11日実施

1.

次の $\boxed{}$ にあてはまる適切な数値を解答欄に記入せよ。

2 つの袋 A, B があり，それぞれに 1, 2, 3 の数字がひとつずつ書かれた 3 個の玉が入っている。袋 A, B から玉を 1 個ずつ取り出し，取り出した 2 個の玉に書かれた数の差の絶対値が 1 であるときはそれらの玉を取り除き，そうでないときはもとの袋に戻すという操作を繰り返し行う。このとき，

- 2 回目の操作を終えたとき，袋の中に玉がちょうど 1 個ずつ残っている確率は $\boxed{(ア)}$ ，
- 3 回目の操作を終えたとき，袋の中に玉がちょうど 2 個ずつ残っている確率は $\boxed{(イ)}$

である。

解答

袋 A, B から取り出した玉の数字をそれぞれ a, b とする。

(ア)　1 回目の操作で袋 A，B から取り出される玉の数字の組み合わせは全部で $3\times 3=9$ 通りあり，玉が取り除かれるのは $|a-b|=1$ のとき，すなわち

$$(a,\ b)=(1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2)\ \cdots\cdots ①$$

の 4 通りである。

このとき，2 回目の操作で袋 A，B から取り出される玉の数字の組み合わせは全部で $2\times 2=4$ 通りある。2 回目の操作を終えたとき，袋の中に玉がちょうど 1 個ずつ残るのは 1 回目，2 回目ともに玉が除かれる場合であるから，次の場合である。

(i)　1 回目に $(a,\ b)=(1,\ 2)$ が起こるとき，2 回目に $(a,\ b)=(2,\ 3)$ または $(2,\ 1)$ が起こる。
(ii)　1 回目に $(a,\ b)=(2,\ 1)$ が起こるとき，2 回目に $(a,\ b)=(1,\ 2)$ または $(3,\ 2)$ が起こる。
(iii)　1 回目に $(a,\ b)=(2,\ 3)$ が起こるとき，2 回目に $(a,\ b)=(1,\ 2)$ または $(3,\ 2)$ が起こる。
(iv)　1 回目に $(a,\ b)=(3,\ 2)$ が起こるとき，2 回目に $(a,\ b)=(2,\ 1)$ または $(2,\ 3)$ が起こる。

したがって，2 回目の操作を終えたとき，袋の中に玉がちょうど 1 個ずつ残る確率は

$$\frac{1}{9}\times\frac{2}{4}\times 4=\boldsymbol{\frac{2}{9}}$$

(イ)　玉が 3 個ずつ入っている状態から玉が取り除かれる確率は，①が起こる場合で

$$\frac{4}{9}$$

であるため，玉が取り除かれない確率は

$$1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$$

である。

次に，1 回操作を行って玉が 2 個ずつ残っている状態から，さらに操作を行って玉が取り除かれる確率を考える。1 回目に $(1,\ 2)$ が起きるとすると，残った玉は袋 A が $\{2,\ 3\}$，袋 B が $\{1,\ 3\}$ である。このとき，取り出した 2 個の玉の差の絶対値が 1 となる組み合わせは，

$$(a,\ b) = (2,\ 1)\,,\ (2,\ 3)$$

の 2 通りである。取り出し方は全部で $2 \times 2 = 4$ 通りであるから，この状態で玉が取り除かれる確率は

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

である。これは，1 回目に取り除かれるのが他の組み合わせの場合も同様である。

また，玉が取り除かれない確率は $1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$ である。

さて，3 回目の操作を終えたとき，袋の中に玉がちょうど 2 個ずつ残っているのは，3 回の操作のうち「玉を取り除く操作」がちょうど 1 回だけ行われる場合である。取り除かれるのが何回目の操作であるかで場合を分けて考える。

(i)　1 回目に玉が取り除かれ，2 回目，3 回目に玉が取り除かれない場合

$$\frac{4}{9} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{9}$$

(ii)　1 回目に玉が取り除かれず，2 回目に玉が取り除かれ，3 回目に玉が取り除かれない場合

$$\frac{5}{9} \times \frac{4}{9} \times \frac{1}{2} = \frac{10}{81}$$

(iii)　1 回目，2 回目に玉が取り除かれず，3 回目に玉が取り除かれる場合

$$\frac{5}{9} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{9} = \frac{100}{729}$$

これらは互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{1}{9} + \frac{10}{81} + \frac{100}{729} = \frac{81 + 90 + 100}{729} = \frac{271}{729}$$

である。よって，求める確率は $\boldsymbol{\dfrac{271}{729}}$ となる。

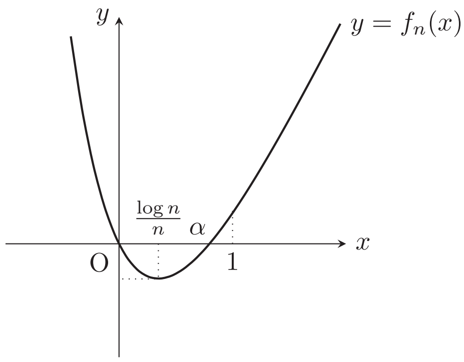
2.

2 以上の自然数 n に対して，関数 $f_n(x)$ を $f_n(x) = e^{-nx} + x - 1$ と定める。曲線 $y = f_n(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積を S_n とするとき，極限 $\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ。ただし，e は自然対数の底とする。

解答

$f_n(x) = e^{-nx} + x - 1$ より $f'(x) = -ne^{-nx} + 1$ であるので，$f'(x) = 0$ のとき $x = \dfrac{\log n}{n}$ である。
したがって，$f_n(0) = 0$, $\lim_{x\to\pm\infty} f_n(x) = \infty$ とあわせて，$y = f_n(x)$ の増減およびグラフは次のようになる。

x	$\cdots$	$\dfrac{\log n}{n}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$



これより，$f_n(x) = 0$ の実数解は $x = 0,\ \alpha$ とできる。
ただし，α は

$$e^{-n\alpha} + \alpha - 1 = 0,\ \text{かつ}\ \alpha > 0$$

を満たす。このとき

$$\begin{aligned} S_n &= \int_0^{\alpha} \{-f_n(x)\}dx \\ &= \left[\frac{e^{-nx}}{n} - \frac{x^2}{2} + x\right]_0^{\alpha} \\ &= \frac{e^{-n\alpha}}{n} - \frac{\alpha^2}{2} + \alpha - \frac{1}{n} \\ &= \frac{1-\alpha}{n} - \frac{\alpha^2}{2} + \alpha - \frac{1}{n} \quad (\because e^{-n\alpha} + \alpha - 1 = 0) \\ &= -\frac{\alpha}{n} - \frac{\alpha^2}{2} + \alpha \end{aligned}$$

ここで，$f_n(1) = e^{-n} > 0$ であるから，グラフとあわせて $0 < \alpha < 1$ である。
また，$e^{-n\alpha} + \alpha - 1 = 0$ より，$n \to \infty$ のとき $e^{-n\alpha} \to 0$ より $\alpha \to 1 - 0$ である。
よって

$$S_n \to -0 - \frac{1^2}{2} + 1 = \mathbf{\frac{1}{2}} \quad (n \to \infty)$$

3.

素数 p は 3 以上の定数とする。自然数の数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+\gcd(p,\ a_n)\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

をみたすとき，$\cos\left(\dfrac{a_{n+p}}{a_n}\pi\right)$ を最大にする n をすべて求めよ。ただし，p と a_n の最大公約数を $\gcd(p,\ a_n)$ で表す。

$\boxed{\text{解答}}$

数列 $\{a_n\}$ の一般項が

$$a_n=\begin{cases} n & (n\leqq p-1) \\ (n-p+1)p & (n\geqq p)\end{cases}\quad\cdots\cdots(*)$$

であることを数学的帰納法により証明する。

$n=1$ では条件より $a_1=1$ で成立する。

$n=k$ で成立を仮定する。

- $k\leqq p-2$ の場合
  帰納法の仮定より $a_k=k$ である。$k\leqq p-2$ より k と p は互いに素であるため，

$$a_{k+1}=a_k+\gcd(p,\ k)=k+1$$

  となり，$n=k+1$ のとき，$(*)$ は成立する。
- $k=p-1$ の場合
  このとき $k+1=p$ である。前の場合と同様に計算することで $a_{k+1}=k+1=p$ を得る。よって

$$a_{k+1}=p=(p-p+1)p=\{(k+1)-p+1\}p$$

  であるため，$n=k+1$ のとき，$(*)$ は成立する。
- $k\geqq p$ の場合
  帰納法の仮定より $a_k=(k-p+1)p$ である。このとき a_k は p の倍数であるため，$\gcd(p,\ a_k)=p$ である。よって

$$a_{k+1}=a_k+\gcd\ (p,\ k)=(k-p+1)p+p=\{(k+1)-p+1\}p$$

  となり，$n=k+1$ のとき，$(*)$ は成立する。

以上より数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n=\begin{cases} n & (n\leqq p-1) \\ (n-p+1)p & (n\geqq p)\end{cases}$ である。

いま，$\cos x$ は $x=2m\pi$（m は整数）のとき，最大値 1 をとる。よって $\dfrac{a_{n+p}}{a_n}$ が偶数になる n が存在するか調べる。

以下，p は 3 以上の素数であるため，特に奇数であることに注意する。

- $n\leqq p-1$ の場合
  $n\leqq p-1$ であるため $a_n=n$ で，$n+p\geqq p$ であるため，$a_{n+p}=(n+p-p+1)p=(n+1)p$ である。よって

$$\frac{a_{n+p}}{a_n}=\frac{(n+1)p}{n}=p+\frac{p}{n}$$

  である。したがって，

$$n\leqq p-1\ \text{かつ，}\ \frac{a_{n+p}}{a_n}=p+\frac{p}{n}\ \text{が偶数}$$

$$\iff n \leqq p-1 \text{ かつ, } \frac{p}{n} \text{ が奇数}$$

である。p が素数であることから，$n \leqq p-1$ において $\dfrac{p}{n}$ が奇数になるのは $n=1$ のときに限る。

ゆえに，$n \leqq p-1$ のとき $n=1$ である。

- $n \geqq p$ の場合

  $n,\ n+p \geqq p$ より $a_n=(n-p+1)p,\ a_{n+p}=(n+1)p$ である。よって

$$\frac{a_{n+p}}{a_n}=\frac{n+1}{n-p+1}=1+\frac{p}{n-p+1}$$

  である。同様に考えると

$$n \geqq p \text{ かつ, } \frac{a_{n+p}}{a_n}=1+\frac{p}{n-p+1} \text{ が偶数}$$
$$\iff n \geqq p \text{ かつ, } \frac{p}{n-p+1} \text{ が奇数}$$

  である。

  p は奇数の素数であることから，$\dfrac{p}{n-p+1}$ が奇数になるときは $n-p+1=1,\ p$ のときに限る。（ぞれぞれ $p,\ 1$ になる。）　整理して $n=p,\ 2p-1$ を得る。これらはいずれも $n \geqq p$ を満たす。

以上より，$\dfrac{a_{n+p}}{a_n}$ が偶数になる n が存在し，このとき $\cos\dfrac{a_{n+p}}{a_n}\pi$ は最大となる。

よって，求める自然数 n は $n=\boldsymbol{1,\ p,\ 2p-1}$ である。

4.

O を原点とする xyz 空間に，5 点 A(2, 0, 0)，B(0, 2, 0)，C(0, 0, 2)，D(1, 1, 0)，E(0, 0, 1) がある。線分 OA 上に動点 P$(p,\ 0,\ 0)$ $(0 \leqq p \leqq 2)$ をとり，平面 PDE と直線 BC との交点を Q とし，p が $0 \leqq p \leqq 2$ の範囲を動くときに線分 PQ が通過してできる図形を S とする。図形 S，平面 $x=0$ および平面 $z=0$ で囲まれた部分からなる立体を K とするとき，K の $x \leqq 2y$ をみたす部分の体積を求めよ。

解答

求める体積を V とおく。

点 Q は平面 PDE 上に存在するため，実数 $s,\ t$ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (1-s-t)\overrightarrow{\mathrm{OE}} + s\overrightarrow{\mathrm{OD}} + t\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{pmatrix} s+tp \\ s \\ 1-s-t \end{pmatrix}$$

と表される。一方，点 Q は直線 BC 上に存在するため，実数 u を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = u\overrightarrow{\mathrm{OB}} + (1-u)\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2u \\ 2-2u \end{pmatrix}$$

と表される。成分を比較すると

$$\begin{cases} s+tp=0 \\ s=2u \\ 1-s-t=-2-2u \end{cases}$$

である。これを解くと $s=p,\ t=-1$ となるため，点 Q の座標は $(0,\ p,\ 2-p)$ である。

実数 k は $0 \leqq k \leqq 2$ を満たすものとする。立体 K の平面 $y=k$ での断面の面積を $S(k)$ とおく。平面 $y=k$ と線分 PQ の交点を R とおくと，実数 m によって

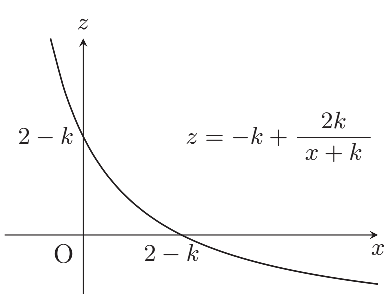
$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = (1-m)\overrightarrow{\mathrm{OP}} + m\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \begin{pmatrix} (1-m)p \\ mp \\ (2-p)m \end{pmatrix}$$

と表される。ここで，y 成分は k であるため $m=\dfrac{k}{p}$ である。代入することで点 R の座標は

$$\mathrm{R}\left(p-k,\ k,\ -k+\frac{2k}{p}\right)$$

となる。R$\,(x,\ y,\ z)$ とすると，$x=p-k,\ z=-k+\dfrac{2k}{p}$ より，p $(0 \leqq p \leqq 2)$ を消去して

$y=k$ 上において，点 R は曲線 $z=-k+\dfrac{2k}{x+k}$ $(-k \leqq x \leqq 2-k)$ 上に存在することがわかる。

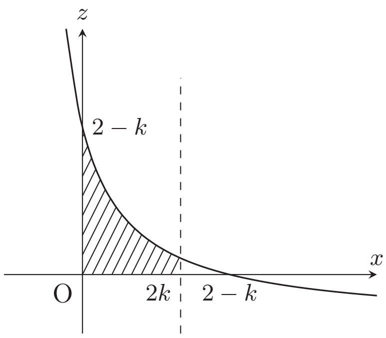


以下，立体 K の平面 $y=k$ $(0 \leqq k \leqq 2)$ による断面について，

条件より，$x \leqq 2y$ であるため x の範囲が $x \leqq 2k$，かつ $-k \leqq x \leqq 2-k$ であり，

さらに K の断面が $x=0,\ z=0$ で囲まれる領域であることに注意する。

- $2-k \geqq 2k$ つまり $0 \leqq k \leqq \dfrac{2}{3}$ のとき
  K の断面は下図の斜線部分になる。

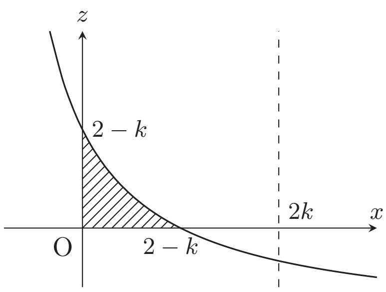


よって，

$$
\begin{aligned}
S(k) &= \int_0^{2k} \left(-k + \frac{2k}{x+k}\right) dx \\
&= \Big[-kx + 2k\log|x+k| \Big]_0^{2k} \\
&= -2k^2 + 2k\log(2k+k) - 2k\log(0+k) \\
&= -2k^2 + 2k\log 3
\end{aligned}
$$

である。

- $2-k \leqq 2k$ つまり $\dfrac{2}{3} \leqq k \leqq 2$ のとき
  K の断面は下図の斜線部分になる。



よって，

$$
\begin{aligned}
S(k) &= \int_0^{2-k} \left(-k + \frac{2k}{x+k}\right) dx \\
&= \Big[-kx + 2k\log|x+k| \Big]_0^{2-k} \\
&= k^2 - 2k + 2k\log(2-k+k) - 2k\log(0+k) \\
&= k^2 + (2\log 2 - 2)k - 2k\log k
\end{aligned}
$$

である。

部分積分により

$$
\begin{aligned}
\int x\log x \; dx &= \frac{1}{2}x^2\log x - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot x \; dx \\
&= \frac{1}{2}x^2\log x - \frac{1}{4}x^2
\end{aligned}
$$

であることに注意すると,

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^{\frac{2}{3}} (-2k^2 + 2k\log 3)dk \\
&\quad + \int_{\frac{2}{3}}^{2} \{k^2 + (2\log 2 - 2)k - 2k\log k\}dk \\
&= \Big[-\frac{2}{3}k^3 + k^2 \log 3 \Big]_0^{\frac{2}{3}} \\
&\quad + \Big[\frac{1}{3}k^3 + (\log 2 - 1)k^2 - k^2\log k + \frac{1}{2}k^2 \Big]_{\frac{2}{3}}^{2} \\
&= -\frac{16}{81} + \frac{4}{9}\log 3 \\
&\quad + \frac{8}{3} - \frac{8}{81} + 4(\log 2 - 1) - \frac{4}{9}(\log 2 - 1) \\
&\quad - 4\log 2 + \frac{4}{9}\log\frac{2}{3} + 2 - \frac{2}{9} \\
&= \mathbf{\frac{16}{27}}
\end{aligned}
$$

である。

講評

1.［確率］（標準）：標準的な確率の問題であった。後半の問題は適切に場合分けをすればよい。ここはできる限り得点したいところ。

2.［数III積分法，極限］（標準）：積分と極限に関する問題であった。$e^{-nx}+x-1=0$ の解をうまく計算しようとするのではなく α とおいて処理すればよい。面積の値は $e^{-n\alpha}=1-\alpha$ を使うことで簡単にできる。途中 α の評価を考えるが，慣れている受験生にとってはさほど難しくはないが，最難関大レベルの問題に対する経験の差が出たであろう。

3.［整数］（やや難）：特殊な形の漸化式を解く問題であった。具体的に実験することで見通しを立てたいところ。一般項を具体的に求めるまでが勝負だろう。ただし，論証を正確に記述するのは骨が折れる。まずは答えを求めることに注力したい。

4.［空間座標，数III積分法,］（やや難）：空間座標におけるセオリー通り平面での断面を考えて計算していきたいところであるが，適切に議論ができないと計算が煩雑になってしまう。

昨年度に比べるとやや難化した。大問構成，出題分野は例年通りであったが，小問がなくなり，一から自身で組み立てる力が求められる。最難関大にふさわしい出題であった。大問 1〜3 は論証力，大問 4 は計算力が求められる。前半で可能な限り得点を重ねておきたいところだ。一次突破ボーダーは 50% 程度か。