

東京慈恵会医科大学 数学

2026年 2月 11日実施

1.

次の にあてはまる適切な数値を解答欄に記入せよ。

2つの袋 A, B があり、それぞれに 1, 2, 3 の数字がひとつずつ書かれた 3 個の玉が入っている。袋 A, B から玉を 1 個ずつ取り出し、取り出した 2 個の玉に書かれた数の差の絶対値が 1 であるときはそれらの玉を取り除き、そうでないときはもとの袋に戻すという操作を繰り返す。このとき、

- 2 回目の操作を終えたとき、袋の中に玉がちょうど 1 個ずつ残っている確率は (ア) ,
- 3 回目の操作を終えたとき、袋の中に玉がちょうど 2 個ずつ残っている確率は (イ) である。

解答

袋 A, B から取り出した玉の数字をそれぞれ a, b とする。

(ア) 1 回目の操作で袋 A, B から取り出される玉の数字の組み合わせは全部で $3 \times 3 = 9$ 通りあり、玉が取り除かれるのは $|a - b| = 1$ のとき、すなわち

$$(a, b) = (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2) \dots\dots ①$$

の 4 通りである。

このとき、2 回目の操作で袋 A, B から取り出される玉の数字の組み合わせは全部で $2 \times 2 = 4$ 通りある。2 回目の操作を終えたとき、袋の中に玉がちょうど 1 個ずつ残るのは 1 回目、2 回目ともに玉が除かれる場合であるから、次の場合である。

- (i) 1 回目に $(a, b) = (1, 2)$ が起こるとき、2 回目に $(a, b) = (2, 3)$ または $(2, 1)$ が起こる。
- (ii) 1 回目に $(a, b) = (2, 1)$ が起こるとき、2 回目に $(a, b) = (1, 2)$ または $(3, 2)$ が起こる。
- (iii) 1 回目に $(a, b) = (2, 3)$ が起こるとき、2 回目に $(a, b) = (1, 2)$ または $(3, 2)$ が起こる。
- (iv) 1 回目に $(a, b) = (3, 2)$ が起こるとき、2 回目に $(a, b) = (2, 1)$ または $(2, 3)$ が起こる。

したがって、2 回目の操作を終えたとき、袋の中に玉がちょうど 1 個ずつ残る確率は

$$\frac{1}{9} \times \frac{2}{4} \times 4 = \frac{2}{9}$$

(イ) 玉が 3 個ずつ入っている状態から玉が取り除かれる確率は、①が起こる場合で

$$\frac{4}{9}$$

であるため、玉が取り除かれない確率は

$$1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

である。

次に、1回操作を行って玉が2個ずつ残っている状態から、さらに操作を行って玉が取り除かれる確率を考える。1回目に(1, 2)が起きるとすると、残った玉は袋Aが{2, 3}, 袋Bが{1, 3}である。このとき、取り出した2個の玉の差の絶対値が1となる組み合わせは、

$$(a, b) = (2, 1), (2, 3)$$

の2通りである。取り出し方は全部で $2 \times 2 = 4$ 通りであるから、この状態で玉が取り除かれる確率は

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

である。これは、1回目に取り除かれるのが他の組み合わせの場合も同様である。

また、玉が取り除かれない確率は $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ である。

さて、3回目の操作を終えたとき、袋の中に玉がちょうど2個ずつ残っているのは、3回の操作のうち「玉を取り除く操作」がちょうど1回だけ行われる場合である。取り除かれるのが何回目の操作であるかで場合を分けて考える。

(i) 1回目に玉が取り除かれ、2回目、3回目に玉が取り除かれない場合

$$\frac{4}{9} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{9}$$

(ii) 1回目に玉が取り除かれず、2回目に玉が取り除かれ、3回目に玉が取り除かれない場合

$$\frac{5}{9} \times \frac{4}{9} \times \frac{1}{2} = \frac{10}{81}$$

(iii) 1回目、2回目に玉が取り除かれず、3回目に玉が取り除かれる場合

$$\frac{5}{9} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{9} = \frac{100}{729}$$

これらは互いに排反であるから、求める確率は

$$\frac{1}{9} + \frac{10}{81} + \frac{100}{729} = \frac{81 + 90 + 100}{729} = \frac{271}{729}$$

である。よって、求める確率は $\frac{271}{729}$ となる。

2.

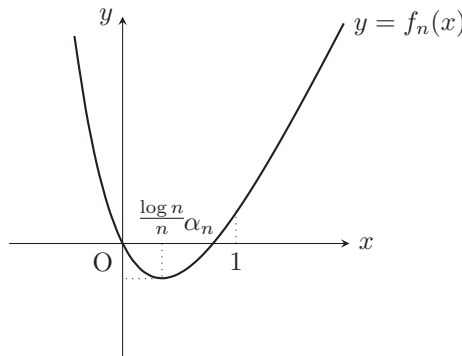
2以上の自然数 n に対して、関数 $f_n(x)$ を $f_n(x) = e^{-nx} + x - 1$ と定める。曲線 $y = f_n(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積を S_n とするとき、極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ。ただし、 e は自然対数の底とする。

解答

$f_n(x) = e^{-nx} + x - 1$ より $f'_n(x) = -ne^{-nx} + 1$ であるので、 $f'_n(x) = 0$ のとき $x = \frac{\log n}{n}$ である。

したがって、 $f_n(0) = 0$ 、 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_n(x) = \infty$ とあわせて、 $y = f_n(x)$ の増減およびグラフは次のようになる。

x	...	$\frac{\log n}{n}$...
$f'_n(x)$	-	0	+
$f_n(x)$	\searrow		\nearrow



これより、 $f_n(x) = 0$ の実数解は $x = 0, \alpha_n$ とできる。

ただし、 α_n は

$$e^{-n\alpha_n} + \alpha_n - 1 = 0, \text{ かつ } \alpha_n > 0$$

を満たす。このとき

$$\begin{aligned} S_n &= \int_0^{\alpha_n} \{-f_n(x)\} dx \\ &= \left[\frac{e^{-nx}}{n} - \frac{x^2}{2} + x \right]_0^{\alpha_n} \\ &= \frac{e^{-n\alpha_n}}{n} - \frac{\alpha_n^2}{2} + \alpha_n - \frac{1}{n} \\ &= \frac{1 - \alpha_n}{n} - \frac{\alpha_n^2}{2} + \alpha_n - \frac{1}{n} \quad (\because e^{-n\alpha_n} + \alpha_n - 1 = 0) \\ &= -\frac{\alpha_n}{n} - \frac{\alpha_n^2}{2} + \alpha_n \end{aligned}$$

ここで、 $f_n(1) = e^{-n} > 0$ であるから、グラフとあわせて $0 < \alpha_n < 1$ である。

また、グラフから $\frac{\log n}{n} < \alpha_n \iff -n\alpha_n < -\log n$ であり、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (-\log n) = -\infty$ であるから、

$\lim_{n \rightarrow \infty} (-n\alpha_n) = -\infty$ である。したがって、 $e^{-n\alpha_n} + \alpha_n - 1 = 0 \iff \alpha_n = 1 - e^{-n\alpha_n}$ より、 $n \rightarrow \infty$ のとき $e^{-n\alpha_n} \rightarrow +0$ から $\alpha_n \rightarrow 1 - 0$ である。

よって

$$S_n \rightarrow -0 - \frac{1^2}{2} + 1 = \frac{1}{2} \quad (n \rightarrow \infty)$$

3.

素数 p は 3 以上の定数とする。自然数の数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + \gcd(p, a_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

をみたすとき、 $\cos\left(\frac{a_{n+p}}{a_n}\pi\right)$ を最大にする n をすべて求めよ。ただし、 p と a_n の最大公約数を $\gcd(p, a_n)$ で表す。

解答

数列 $\{a_n\}$ の一般項が

$$a_n = \begin{cases} n & (n \leq p-1) \\ (n-p+1)p & (n \geq p) \end{cases} \dots\dots(*)$$

であることを数学的帰納法により証明する。

$n = 1$ では条件より $a_1 = 1$ で成立する。

$n = k$ (k は自然数) で成立を仮定する。

- $k \leq p-2$ の場合
帰納法の仮定より $a_k = k$ である。 $k \leq p-2$ より k と p は互いに素であるため、

$$a_{k+1} = a_k + \gcd(p, k) = k + 1$$

となり、 $n = k+1$ のとき、 $(*)$ は成立する。

- $k = p-1$ の場合
このとき $k+1 = p$ である。前の場合と同様に計算することで $a_{k+1} = k+1 = p$ を得る。よって

$$a_{k+1} = p = (p-p+1)p = \{(k+1)-p+1\}p$$

であるため、 $n = k+1$ のとき、 $(*)$ は成立する。

- $k \geq p$ の場合
帰納法の仮定より $a_k = (k-p+1)p$ である。このとき a_k は p の倍数であるため、 $\gcd(p, a_k) = p$ である。よって

$$a_{k+1} = a_k + \gcd(p, k) = (k-p+1)p + p = \{(k+1)-p+1\}p$$

となり、 $n = k+1$ のとき、 $(*)$ は成立する。

以上より数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n = \begin{cases} n & (n \leq p-1) \\ (n-p+1)p & (n \geq p) \end{cases}$ である。

いま、 $\cos x$ は $x = 2m\pi$ (m は整数) のとき、最大値 1 をとる。よって $\frac{a_{n+p}}{a_n}$ が偶数になる n が存在するか調べる。

以下、 p は 3 以上の素数であるため、特に奇数であることに注意する。

- $n \leq p-1$ の場合
 $n \leq p-1$ であるため $a_n = n$ で、 $n+p \geq p$ であるため、 $a_{n+p} = (n+p-p+1)p = (n+1)p$ である。よって

$$\frac{a_{n+p}}{a_n} = \frac{(n+1)p}{n} = p + \frac{p}{n}$$

である。したがって、

$$n \leq p-1 \text{ かつ、} \frac{a_{n+p}}{a_n} = p + \frac{p}{n} \text{ が偶数}$$

$$\iff n \leq p-1 \text{ かつ, } \frac{p}{n} \text{ が奇数}$$

である。 p が素数であることから、 $n \leq p-1$ において $\frac{p}{n}$ が奇数になるのは $n=1$ のときに限る。

ゆえに、 $n \leq p-1$ のとき $n=1$ である。

- $n \geq p$ の場合

$n, n+p \geq p$ より $a_n = (n-p+1)p, a_{n+p} = (n+1)p$ である。よって

$$\frac{a_{n+p}}{a_n} = \frac{n+1}{n-p+1} = 1 + \frac{p}{n-p+1}$$

である。同様に考えると

$$n \geq p \text{ かつ, } \frac{a_{n+p}}{a_n} = 1 + \frac{p}{n-p+1} \text{ が偶数}$$

$$\iff n \geq p \text{ かつ, } \frac{p}{n-p+1} \text{ が奇数}$$

である。

p は奇数の素数であることから、 $\frac{p}{n-p+1}$ が奇数になるときは $n-p+1=1, p$ のときに限る。(それぞれ

$p, 1$ になる。) 整理して $n=p, 2p-1$ を得る。これらはいずれも $n \geq p$ を満たす。

以上より、 $\frac{a_{n+p}}{a_n}$ が偶数になる n が存在し、このとき $\cos \frac{a_{n+p}}{a_n} \pi$ は最大となる。

よって、求める自然数 n は $n=1, p, 2p-1$ である。

4.

O を原点とする xyz 空間に、5 点 $A(2, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(0, 0, 2)$, $D(1, 1, 0)$, $E(0, 0, 1)$ がある。線分 OA 上に動点 $P(p, 0, 0)$ ($0 \leq p \leq 2$) をとり、平面 PDE と直線 BC との交点を Q とし、 p が $0 \leq p \leq 2$ の範囲を動くときに線分 PQ が通過してできる図形を S とする。図形 S , 平面 $x = 0$ および平面 $z = 0$ で囲まれた部分からなる立体を K とするとき、 K の $x \leq 2y$ をみたす部分の体積を求めよ。

解答

求める体積を V とおく。

点 Q は平面 PDE 上に存在するため、実数 s, t を用いて

$$\vec{OQ} = (1 - s - t)\vec{OE} + s\vec{OD} + t\vec{OP} = \begin{pmatrix} s + tp \\ s \\ 1 - s - t \end{pmatrix}$$

と表される。一方、点 Q は直線 BC 上に存在するため、実数 u を用いて

$$\vec{OQ} = u\vec{OB} + (1 - u)\vec{OC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2u \\ 2 - 2u \end{pmatrix}$$

と表される。成分を比較すると

$$\begin{cases} s + tp = 0 \\ s = 2u \\ 1 - s - t = -2 - 2u \end{cases}$$

である。これを解くと $s = p, t = -1$ となるため、点 Q の座標は $(0, p, 2 - p)$ である。

実数 k は $0 \leq k \leq 2$ を満たすものとする。立体 K の平面 $y = k$ での断面の面積を $S(k)$ とおく。平面 $y = k$ と線分 PQ の交点を R とおくと、実数 m によって

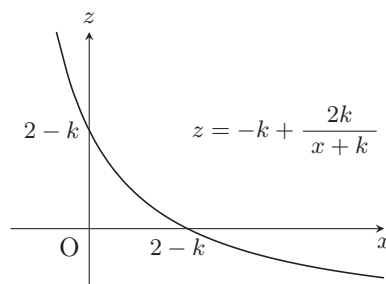
$$\vec{OR} = (1 - m)\vec{OP} + m\vec{OQ} = \begin{pmatrix} (1 - m)p \\ mp \\ (2 - p)m \end{pmatrix}$$

と表される。ここで、 y 成分は k であるため $m = \frac{k}{p}$ である。代入することで点 R の座標は

$$R\left(p - k, k, -k + \frac{2k}{p}\right)$$

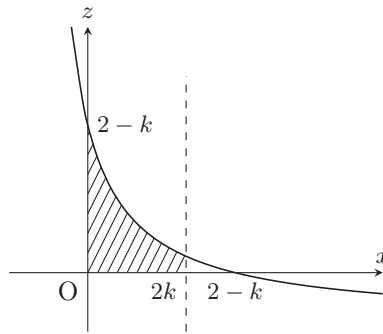
となる。R(x, y, z) とすると、 $x = p - k, z = -k + \frac{2k}{p}$ より、 p ($0 \leq p \leq 2$) を消去して

$y = k$ 上において、点 R は曲線 $z = -k + \frac{2k}{x + k}$ ($-k \leq x \leq 2 - k$) 上に存在することがわかる。



以下、立体 K の平面 $y = k$ ($0 \leq k \leq 2$) による断面について、条件より、 $x \leq 2y$ であるため x の範囲が $x \leq 2k$, かつ $-k \leq x \leq 2 - k$ であり、さらに K の断面が $x = 0, z = 0$ で囲まれる領域であることに注意する。

- $2 - k \geq 2k$ つまり $0 \leq k \leq \frac{2}{3}$ のとき
 K の断面は下図の斜線部分になる。

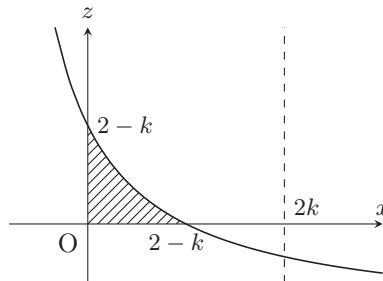


よって,

$$\begin{aligned}
 S(k) &= \int_0^{2k} \left(-k + \frac{2k}{x+k} \right) dx \\
 &= \left[-kx + 2k \log|x+k| \right]_0^{2k} \\
 &= -2k^2 + 2k \log(2k+k) - 2k \log(0+k) \\
 &= -2k^2 + 2k \log 3
 \end{aligned}$$

である。

- $2 - k \leq 2k$ つまり $\frac{2}{3} \leq k \leq 2$ のとき
 K の断面は下図の斜線部分になる。



よって,

$$\begin{aligned}
 S(k) &= \int_0^{2-k} \left(-k + \frac{2k}{x+k} \right) dx \\
 &= \left[-kx + 2k \log|x+k| \right]_0^{2-k} \\
 &= k^2 - 2k + 2k \log(2-k+k) - 2k \log(0+k) \\
 &= k^2 + (2 \log 2 - 2)k - 2k \log k
 \end{aligned}$$

である。

部分積分により

$$\begin{aligned}
 \int x \log x \, dx &= \frac{1}{2} x^2 \log x - \int \frac{1}{2} x^2 \cdot x \, dx \\
 &= \frac{1}{2} x^2 \log x - \frac{1}{4} x^2
 \end{aligned}$$

であることに注意すると,

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^{\frac{2}{3}} (-2k^2 + 2k \log 3) dk \\
 &\quad + \int_{\frac{2}{3}}^2 \{k^2 + (2 \log 2 - 2)k - 2k \log k\} dk \\
 &= \left[-\frac{2}{3}k^3 + k^2 \log 3 \right]_0^{\frac{2}{3}} \\
 &\quad + \left[\frac{1}{3}k^3 + (\log 2 - 1)k^2 - k^2 \log k + \frac{1}{2}k^2 \right]_{\frac{2}{3}}^2 \\
 &= -\frac{16}{81} + \frac{4}{9} \log 3 \\
 &\quad + \frac{8}{3} - \frac{8}{81} + 4(\log 2 - 1) - \frac{4}{9}(\log 2 - 1) \\
 &\quad - 4 \log 2 + \frac{4}{9} \log \frac{2}{3} + 2 - \frac{2}{9} \\
 &= \frac{16}{27}
 \end{aligned}$$

である。

講評

1. [確率] (標準) : 標準的な確率の問題であった。後半の問題は適切に場合分けをすればよい。ここではできる限り得点したいところ。
2. [数Ⅲ積分法, 極限] (標準) : 積分と極限に関する問題であった。 $e^{-nx} + x - 1 = 0$ の解をうまく計算しようとするのではなく α において処理すればよい。面積の値は $e^{-n\alpha} = 1 - \alpha$ を使うことで簡単にできる。途中 α の評価を考えるが、慣れている受験生にとってはさほど難しくはないが、最難関大レベルの問題に対する経験の差が出たであろう。
3. [整数] (やや難) : 特殊な形の漸化式を解く問題であった。具体的に実験することで見通しを立てたいところ。一般項を具体的に求めるまでが勝負だろう。ただし、論証を正確に記述するのは骨が折れる。まずは答えを求めることに注力したい。
4. [空間座標, 数Ⅲ積分法,] (やや難) : 空間座標におけるセオリー通り平面での断面を考えて計算していききたいところであるが、適切に議論ができないと計算が煩雑になってしまう。

昨年度に比べるとやや難化した。大問構成、出題分野は例年通りであったが、小問がなくなり、一から自身で組み立てる力が求められる。最難関大にふさわしい出題であった。大問 1~3 は論証力、大問 4 は計算力が求められる。前半で可能な限り得点を重ねておきたいところだ。一次突破ボーダーは 50% 程度か。

26 年度解答速報はメルマガ登録または LINE 友だち追加で全科目を閲覧

本解答速報の内容に関するお問合せは



医学部専門予備校
YMS

heart of medicine
☎ 03-3370-0410 <https://yms.ne.jp/>
東京都渋谷区代々木 1-37-14

医学部進学予備校 **メビオ** ☎ 0120-146-156
<https://www.mebio.co.jp/>

医学部専門予備校
英進館メビオ 福岡校 ☎ 0120-192-215
<https://www.mebio-eishinkan.com/>

メルマガ登録



LINE 登録

