医学部専門予備校
YMS
医学部進学予備校 メビオ
医学部専門予備校 英進館メビオ 福岡校

解答速報

東京女子医科大学　数学

2026年 2月 1日実施

※聞き取りによる再現問題です。一部誤りを含む可能性があります。

1

以下の問いに答えよ。

① 1〜9 の数字が書かれたカードがそれぞれ 1 枚ずつある。ここから 3 枚を選んで並べるとき，できる 3 桁の数字が 3 の倍数となる確率を求めよ。

② 複素数平面上に複素数 z_1，z_2，z_3 がある。$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ を満たし，かつ 3 点 z_1，z_2，z_3 を結んでできる三角形が正三角形であるとき，$z_1 + z_2 + z_3$ の値を求めよ。

解答

① 全体の総数は $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$

3 桁の整数が 3 の倍数となるのは，各位の和が 3 の倍数のときであるため，3 枚のカードの数字の和が 3 の倍数である組み合わせを計算すればよい。3 枚のカードの数字を順に a，b，c とおく。$a+b+c$ が 3 の倍数になるのは，a，b，c を 3 で割った余りがすべて異なる場合かすべて等しい場合のいずれかである。

- a，b，c を 3 で割った余りがすべて異なる場合
  a，b，c の組み合わせは $3 \times 3 \times 3 = 27$ 通り。各パターンについての順列が $3 \times 2 \times 1 = 6$ 通り存在するため，$27 \times 6 = 162$ 通り。
- a，b，c を 3 で割った余りがすべて等しい場合
  a，b，c の組み合わせは 147，258，369 の 3 通り。各パターンについての順列が 6 通り存在するため，$3 \times 6 = 18$ 通り。

よって求める確率は $\dfrac{162+18}{504} = \boldsymbol{\dfrac{5}{14}}$ である。

② z_1，z_2，z_3 は中心 0 で半径 1 の円周上に存在するため，外心は 0 である。正三角形であったため，重心と外心は一致する。重心は $\dfrac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)$ と表されるため，

$$z_1 + z_2 + z_3 = \mathbf{0}$$

2

$m,\ n$ を自然数とする。不等式 $m^2-6m+n^2-4n<a\ \cdots\cdots(1)$，$m-n>0\ \cdots\cdots(2)$ がある。不等式 (1)(2) を満たす $(m,\ n)$ の組を考える。以下の問いに答えよ。

① 組 $(m,\ n)$ が存在するための a の必要十分条件を求めよ。

② $a=-9$ のとき，組 $(m,\ n)$ をすべて求めよ。

③ 組 $(m,\ n)$ の個数が 9 個のときの a の条件を求めよ。

解答

①

$$m^2-6m+n^2-4n<a$$
$$(m-3)^2+(n-2)^2<a+13\ \cdots\cdots ⓐ$$

であるから，ⓐを満たす自然数の組 $(m,\ n)$ が存在するための条件は

$$a+13>0 \qquad \therefore\ a>-13$$

このとき，ⓐを満たす $(m,\ n)$ として $(3,\ 2)$ があるが，これは

$$m>n$$

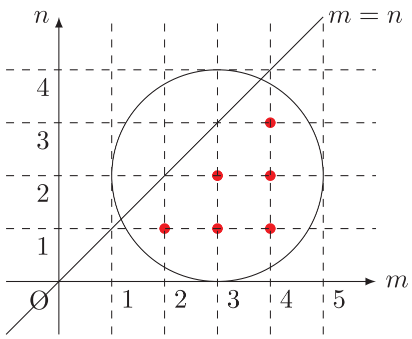
の条件をも満たす。

よって，求める必要十分条件は $\boldsymbol{a>-13}$

② $a=-9$ のとき

$$\begin{cases}(m-3)^2+(n-2)^2<4\\ m>n\end{cases}$$

を満たす点を mn 平面上に図示すると，次の図のようになる。



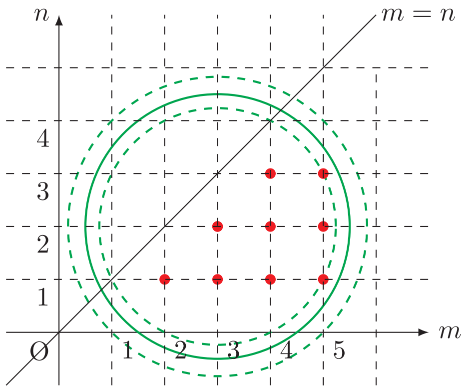
図より，条件を満たす $(m,\ n)$ は

$$\boldsymbol{(2,\ 1),\ (3,\ 1),\ (4,\ 1),\ (3,\ 2),\ (4,\ 2),\ (4,\ 3)}$$

③

$$\begin{cases}(m-3)^2+(n-2)^2<a+13 \qquad ((3,\ 2)\text{ を中心とする半径}\sqrt{a+13}\text{の円の内部})\\ m>n\end{cases}$$

を満たす自然数の組 $(m,\ n)$ が 9 個となるのは，次の図のような状況である。



図より，円の半径の範囲を考えて

$$\sqrt{5} < \sqrt{a+13} \leqq \sqrt{8}$$

$$\therefore \ \boldsymbol{-8 < a \leqq -5}$$

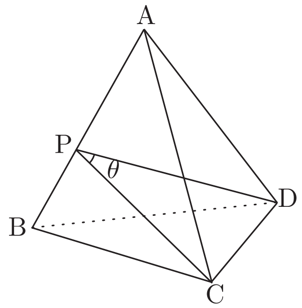
3

1 辺の長さが 3 である正四面体 ABCD があり，AB を $t : 1-t$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ に内分する点を P とする。また，$\angle \mathrm{CPD} = \theta$ とするとき，以下の問いに答えよ。

① $|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2$，$\overrightarrow{\mathrm{PC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PD}}$ を t を用いて表せ。

② $\cos\theta$ の最小値を求めよ。またそのときの t の値を求めよ。

解答



① 頂点 A を始点とし，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{c}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \vec{d}$ とおく。 正四面体の 1 辺の長さが 3 であることから，

$$|\vec{b}| = |\vec{c}| = |\vec{d}| = 3$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{d} = \vec{d} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ = \frac{9}{2}$$

点 P は辺 AB を $t : 1-t$ に内分するため，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = t\vec{b}$ である。 これより，$\overrightarrow{\mathrm{PC}} = \vec{c} - t\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{PD}} = \vec{d} - t\vec{b}$ となる。ゆえに，

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2 &= |\vec{c} - t\vec{b}|^2 \\ &= |\vec{c}|^2 - 2t(\vec{b} \cdot \vec{c}) + t^2|\vec{b}|^2 \\ &= 3^2 - 2t \cdot \frac{9}{2} + 9t^2 \\ &= \boldsymbol{9t^2 - 9t + 9}\end{aligned}$$

さらに，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PD}} &= (\vec{c} - t\vec{b}) \cdot (\vec{d} - t\vec{b}) \\ &= \vec{c} \cdot \vec{d} - t(\vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{d}) + t^2|\vec{b}|^2 \\ &= \boldsymbol{9t^2 - 9t + \frac{9}{2}}\end{aligned}$$

② 正四面体の対称性により $|\overrightarrow{\mathrm{PC}}| = |\overrightarrow{\mathrm{PD}}|$ であるから，

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{\mathrm{PC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PD}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PC}}||\overrightarrow{\mathrm{PD}}|} = \frac{t^2 - t + \frac{1}{2}}{t^2 - t + 1}$$

ここで，$u = t^2 - t + 1$ とおくと，

$$\cos\theta = 1 - \frac{1}{2u}$$

となる。$0 \leqq t \leqq 1$ において，$u = \left(t - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}$ のとり得る値の範囲は $\dfrac{3}{4} \leqq u \leqq 1$ である。

よって，$\cos\theta$ が最小となるのは，u が最小値 $\dfrac{3}{4}$ $\left(\boldsymbol{t = \dfrac{1}{2}}\right)$ をとるときであるため，$\cos\theta$ の最小値は $\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$ である。

4

座標空間内に A$(a,\ 0,\ 0)$ $(0 \leqq a \leqq 1)$，B$(1,\ 1,\ 1)$，C$(1,\ 1,\ 0)$ がある。以下の問いに答えよ。

① $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の成分を求めよ。

② 線分 AB を z 軸のまわりに回転するとき，平面 $z=k$ $(0 \leqq k \leqq 1)$ によって切り取られる図形の面積を求めよ。

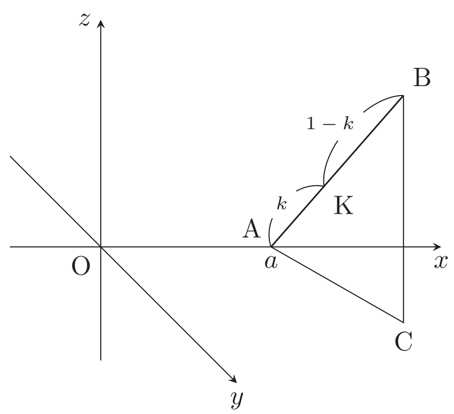
③ $a=1$ のとき，三角形 ABC を z 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ。

解答

① $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \boldsymbol{(1-a,\ 1,\ 1)}$

② 線分 AB と平面 $z=k$ $(0 \leqq k \leqq 1)$ の交点を K とする。
このとき，K は AB を $k : 1-k$ に内分する点であるので

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OK}} &= (1-k)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + k\overrightarrow{\mathrm{OB}} \\ &= (a+(1-a)k,\ k,\ k)\end{aligned}$$

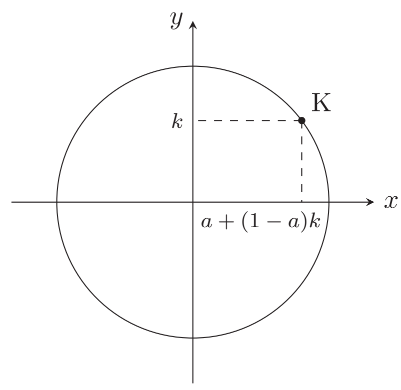


よって，平面 $z=k$ $(0 \leqq k \leqq 1)$ 上の図形は，H$(0,\ 0,\ k)$ として

$$\text{半径 HK} = \sqrt{\{a+(1-a)k\}^2 + k^2}$$

の円となる。よって，求める面積は

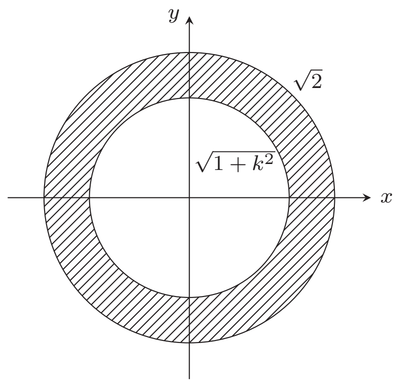
$$\boldsymbol{\pi[a^2 + 2a(1-a)k + \{(1-a)^2+1\}k^2]}$$



③ 平面 $z=k$ $(0 \leqq k \leqq 1)$ の切り口は次のようになる。
よって，平面 $z=k$ $(0 \leqq k \leqq 1)$ 上の図形は半径 $\sqrt{2}$ の円から②の円において $a=1$ としたもの（半径 $\sqrt{1+k^2}$

の円）をくり抜いた図形となるので，その断面積は

$$\pi\{\sqrt{2}^2-(1+k^2)\}=\pi(1-k^2)$$



よって，求める体積は

$$\int_0^1 \pi(1-k^2)dk=\pi\left[k-\frac{k^3}{3}\right]_0^1=\boldsymbol{\frac{2}{3}\pi}$$

講評

1［小問集合］(標準)：① 確率，② 複素数平面からの出題であった。いずれも標準的であるが，① は数えミスに注意し，② はいち早く図形を想像したい。

2［集合と論証］（やや難）：第 1 象限に存在する格子点の個数に関する出題であった。計算量は少ないものの，テーマ上取り組みにくかった受験生が多かったのではないか。

3［図形と計量，空間ベクトル］（標準）：正四面体の角度に関する出題であった。三角形 CPD が二等辺三角形になることなどを利用して手際よく計算を進めたい。

4［数III積分法］（標準）：平面の回転体の体積というやや難度の高いテーマからの出題であった。典型的な内容であるが，経験で差がついたであろう。

昨年度と同程度の難易度であった。全体的に計算量は少なめで典型的な出題が多かったが，受験生にとってはやりにくいテーマが多かったのではないか。一次突破ボーダーは 55% 程度か。