医学部専門予備校 YMS
医学部進学予備校 メビオ
医学部専門予備校 英進館メビオ 福岡校

解答速報

慶應義塾大学医学部　数学

2026年 2月 9日実施

[I]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。ただし，根号を用いた分数は，分母を有理化した形で記入しなさい。

(1) 連続型確率変数 X のとる値の範囲が $\alpha \leqq X \leqq \beta$ で，その確率密度関数が $f(x)$ であるとき，X の期待値 $m=E(X)$ と分散 $V(X)$ を次の式で定める。

$$m=E(X)=\int_\alpha^\beta xf(x)dx,\quad V(X)=\int_\alpha^\beta (x-m)^2f(x)dx$$

連続型確率変数 Y のとる値の範囲が $0 \leqq Y \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で，その確率密度関数が

$$g(y)=\sin 2y\quad \left(0 \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

であるとき，$\dfrac{\pi}{4} \leqq Y \leqq \dfrac{3}{8}\pi$ となる確率は $\boxed{(あ)}$ である。また，$E(Y)=\boxed{(い)}$ であり，$V(Y)=\boxed{(う)}$ である。

(2) a を実数とし，2 つの集合 A と B を，それぞれ区間

$$A=[3(a+1),\ 3(a+2)],\quad B=\left[a^3-4a,\ a^3-4a+2(a-1)^2+1\right]$$

と定める。集合 A, B のどちらにも属する要素があるための必要十分条件は，

$\boxed{(え)} \leqq a \leqq \boxed{(お)}$，または $\boxed{(か)} \leqq a \leqq \boxed{(き)}$，または $\boxed{(く)} \leqq a \leqq \boxed{(け)}$ である。ただし，$\boxed{(え)} < \boxed{(か)} < \boxed{(く)}$ とする。

(3) b を 0 でない実数とする。座標空間に平行四辺形 OPQR があり，その頂点の座標が

$$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0),\quad \mathrm{P}(0,\ 1,\ -1),\quad \mathrm{Q}(1,\ c,\ d),\quad \mathrm{R}\left(1,\ b,\ \frac{1}{b}\right)$$

であるとき，b を用いて $c=\boxed{(こ)}$，$d=\boxed{(さ)}$ と表され，平行四辺形 OPQR の面積 $S(b)$ は，b を用いて $\sqrt{\boxed{(し)}}$ と表される。また，b が 0 でないすべての実数を動くとき，$S(b)$ の最小値は $\boxed{(す)}$ である。

解答

(1) $\dfrac{\pi}{4} \leqq Y \leqq \dfrac{3}{8}\pi$ となる確率は

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{8}\pi} g(y)dy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{8}\pi} \sin 2y dy$$

$$= \Big[-\frac{1}{2}\cos 2y\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{8}\pi} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{4}}$$

Y の期待値は

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} yg(y)dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} y\sin 2y dy \\ &= \Big[-\frac{1}{2}y\cos 2y + \frac{1}{4}\sin 2y\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \boldsymbol{\frac{\pi}{4}}\ (= m \text{ とする}) \end{aligned}$$

さらに，Y の分散は

$$\begin{aligned} V(Y) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y-m)^2 g(y)dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y^2 - 2my + m^2)^2 g(y)dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} y^2 g(y)dy - 2m\int_0^{\frac{\pi}{2}} yg(y)dy + m^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(y)dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} y^2 g(y)dy - 2m^2 - m^2 \\ &= E(Y^2) - m^2 \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} y^2 \sin 2y dy - m^2 \\ &= \Big[-\frac{1}{2}y^2\cos 2y + \frac{1}{2}y\sin 2y + \frac{1}{4}\cos 2y\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \left(\frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \\ &= \boldsymbol{\frac{\pi^2 - 8}{16}} \end{aligned}$$

(2) 区間 A，B が共通部分をもたない条件は

$$3(a+2) < a^3 - 4a \quad \text{または} \quad a^3 - 4a + 2(a-1)^2 + 1 < 3(a+1)$$

であるから，これを否定して，
区間 A，B が共通部分をもつための条件は

$$3(a+2) \geqq a^3 - 4a \ \cdots\cdots ① \quad \text{かつ} \quad a^3 - 4a + 2(a-1)^2 + 1 \geqq 3(a+1) \ \cdots\cdots ②$$

である。
①より

$$a^3 - 7a - 6 \leqq 0$$

$$(a+2)(a+1)(a-3) \leqq 0$$

$$\therefore\ a \leqq -2 \text{ または } -1 \leqq a \leqq 3 \ \cdots\cdots ③$$

また，②より

$$a^3+2a^2-11a \geqq 0$$

$$a(a^2+2a-11) \geqq 0$$

$$\therefore\quad -1-2\sqrt{3} \leqq a \leqq 0 \text{ または } -1+2\sqrt{3} \leqq a \quad \cdots\cdots ④$$

③と④をともに満たす範囲を求めて

$$\boldsymbol{-1-2\sqrt{3} \leqq a \leqq -2,\ -1 \leqq a \leqq 0,\ -1+2\sqrt{3} \leqq a \leqq 3}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(1,\ c-1,\ d+1)$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\left(1,\ b,\ \dfrac{1}{b}\right)$ であり，

四角形 OPQR が平行四辺形であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}$$

$$(1,\ c-1,\ d+1)=\left(1,\ b,\ \frac{1}{b}\right)$$

$$c-2=b,\ d+1=\frac{1}{b}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{c=b+1,\ d=\frac{1}{b}-1}$$

また，平行四辺形 OPQR の面積 $S(b)$ は

$$\begin{aligned} S(b) &= \sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OR}}\right|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}\right)^2} \\ &= \sqrt{2\left(1+b^2+\frac{1}{b^2}\right)-\left(b-\frac{1}{b}\right)^2} \\ &= \sqrt{\boldsymbol{b^2+\frac{1}{b^2}+4}} \end{aligned}$$

$b^2>0$，$\dfrac{1}{b^2}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の関係より

$$S(b) \geqq \sqrt{2\sqrt{b^2\cdot\frac{1}{b^2}}+4}$$

$$\therefore\quad S(b) \geqq \sqrt{6} \qquad\qquad (\text{等号は } b=1 \text{ のときに成立する})$$

よって，$S(b)$ の最小値は $\boldsymbol{\sqrt{6}}$

[Ⅱ]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。ただし，空欄 (え)，(く)，(け) には n の式を入れ，それ以外の空欄には数を入れなさい。

袋が 1 つ，赤玉 4 個と白玉 2 個が用意されている。2 個以上の玉が袋に入った状態に対して，操作 T の手順を次のように定める。

> 操作 T
> 袋から玉を 2 個同時に取り出し，それらが 2 個とも赤玉である場合には袋に戻さず，それ以外の場合には 2 個とも袋に戻す。

n を自然数とする。赤玉 4 個と白玉 2 個が袋に入った状態から始めて，操作 T を n 回施し終えたときに，袋に入っている赤玉の個数を a_n とする。$a_n=4$ である確率を p_n とし，$a_n=2$ である確率を q_n とする。

(1)　次の関係式

$$p_{n+1}=\boxed{\text{(あ)}}\,p_n,\quad q_{n+1}=\boxed{\text{(い)}}\,p_n+\boxed{\text{(う)}}\,q_n$$

が成り立つ。よって，n を用いて

$$p_n=\boxed{\text{(え)}},\quad q_n=\boxed{\text{(お)}}\left\{\left(\boxed{\text{(か)}}\right)^n-\left(\boxed{\text{(き)}}\right)^n\right\}$$

と表される。ただし，$\boxed{\text{(か)}}>\boxed{\text{(き)}}$ とする。したがって，赤玉 4 個と白玉 2 個が袋に入った状態から始めて，操作 T を n 回施し終えたときに初めて袋の中の赤玉が 0 個になる確率は $\boxed{\text{(く)}}$ である。

(2)　X_n を

$a_n=4$ のとき 6，　$a_n=2$ のとき 3.5，　$a_n=0$ のとき 0

という値をとる確率変数とすると，X_n の期待値は $\boxed{\text{(け)}}$ であり，分散は

$$3\left\{\boxed{\text{(こ)}}\left(\boxed{\text{(さ)}}\right)^n+\boxed{\text{(し)}}\left(\boxed{\text{(す)}}\right)^n+\boxed{\text{(せ)}}\left(\boxed{\text{(そ)}}\right)^n\right\}$$

である。ただし，$\boxed{\text{(さ)}}>\boxed{\text{(す)}}>\boxed{\text{(そ)}}$ とする。

(3)　N を自然数とする。赤玉 4 個と白玉 2 個が袋に入った状態から始めて操作 T を N 回施す。操作 T を n 回（ただし $1\leqq n\leqq N$）施し終えたときに初めて袋の中の赤玉が 0 個になった場合に，2^{N-n} 点を得るというゲームを考える。ただし，操作 T を N 回施し終えたときに，袋の中に赤玉が 1 個以上入っている場合の得点は 0 点とする。このゲームの得点の期待値は，

$$\boxed{\text{(た)}}\left\{\left(\boxed{\text{(ち)}}\right)^N+\boxed{\text{(つ)}}\left(\boxed{\text{(て)}}\right)^N+\boxed{\text{(と)}}\left(\boxed{\text{(な)}}\right)^N\right\}$$

である。ただし，$\boxed{\text{(ち)}}>\boxed{\text{(て)}}>\boxed{\text{(な)}}$ とする。

解答

解答において項の順番が指定されている問いでは，項の順番にも注意する。

白玉が袋から取り出された場合，必ず袋に戻されるので，袋の中の白玉の個数は常に 2 個である。また，赤玉は袋に戻されないときは必ず 2 個ずつ減少するので，袋の中の赤玉の個数は 0 個，2 個，4 個のいずれかである。

(1)　赤玉 4 個と白玉 2 個が袋の中に入っているときに操作を行って，袋から取り出した 2 つの玉がともに赤玉すなわち 2 つの玉が袋に戻されない確率は，

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2} = \frac{2}{5}$$

であり，どちらかが白玉すなわち 2 つの玉が袋に戻される確率は $\dfrac{3}{5}$ である。

同様に考えると，赤玉 2 個と白玉 2 個が袋の中に入っているときに操作を行って，袋から取り出した 2 つの玉がともに赤玉すなわち 2 つの玉が袋に戻されない確率は $\dfrac{1}{6}$ であり，どちらかが白玉すなわち 2 つの玉が袋に戻される確率は $\dfrac{5}{6}$ である。

赤玉 0 個と白玉 2 個が袋の中に入っているときに操作を行うと，必ず白玉 2 個が取り出され，2 つの玉は袋に戻される。

以上のことから，

$$p_{n+1} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}} p_n \qquad \text{(a)}$$

$$q_{n+1} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}} p_n + \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{6}} q_n \qquad \text{(b)}$$

が成り立つ。

よって，$p_1 = \dfrac{3}{5}$ と (a) より $p_n = \left(\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}\right)^{\boldsymbol{n}}$ が成り立つ。これを (b) に代入して

$$q_{n+1} = \frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^n + \frac{5}{6} q_n$$

両辺を $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{n+1}$ で割って

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{n+1} q_{n+1} = \frac{2}{3} + \frac{25}{18}\left(\frac{5}{3}\right)^n q_n$$

$s_n = \left(\dfrac{5}{3}\right)^n q_n$ とおくと，

$$\begin{aligned}
s_{n+1} &= \frac{2}{3} + \frac{25}{18} s_n \\
s_{n+1} + \frac{12}{7} &= \frac{25}{18}\left(s_n + \frac{12}{7}\right) \\
s_n + \frac{12}{7} &= \frac{12}{7}\left(\frac{25}{18}\right)^n \\
\left(\frac{5}{3}\right)^n q_n &= \frac{12}{7}\left(\frac{25}{18}\right)^n - \frac{12}{7} \\
q_n &= \left(\frac{3}{5}\right)^n \left\{\frac{12}{7}\left(\frac{25}{18}\right)^n - \frac{12}{7}\right\} \\
q_n &= \frac{\mathbf{12}}{\mathbf{7}}\left\{\left(\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{6}}\right)^n - \left(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}\right)^n\right\}
\end{aligned}$$

である。

操作 T を m 回施し終えたときに袋の中の赤玉が 0 個である確率を r_m とおく。すると，n が 2 以上のとき，操作 T を n 回施し終えたときに初めて袋の中の赤玉が 0 個になるということは，操作 T を n 回施し終えたときに袋の中の赤玉が 0 個であり，かつ操作 T を $n-1$ 回施し終えたときには袋の中の赤玉が 0 個ではないという

ことなので，その確率は $r_n - r_{n-1}$ である。いま，袋の中の赤玉の個数は 0 個，2 個，4 個のいずれかなので，$r_n = 1 - p_n - q_n$ である。よって操作 T を n 回施し終えたときに初めて袋の中の赤玉が 0 個になる確率は

$$\begin{aligned}&r_n - r_{n-1}\\&= 1 - p_n - q_n - (1 - p_{n-1} - q_{n-1})\\&= \frac{2}{7}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} - \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}\right\}\end{aligned}$$

である。$n = 1$ のときにもこれは正しいので答えは $\boldsymbol{\frac{2}{7}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} - \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}\right\}}$ である。

(2)　期待値の定義より，X_n の期待値は

$$6p_n + 3.5q_n + 0 \times r_n = \boldsymbol{6\left(\frac{5}{6}\right)^{n}}$$

である。X_n の分散は，「2 乗の平均 − 平均の 2 乗」と表される。「2 乗の平均」は

$$\begin{aligned}&6^2p_n + 3.5^2q_n + 0^2r_n\\&= 21\left(\frac{5}{6}\right)^n + 15\left(\frac{3}{5}\right)^n\end{aligned}$$

である。「平均の 2 乗」は，$\left\{6\left(\frac{5}{6}\right)^n\right\}^2 = 36\left(\frac{25}{36}\right)^n$ である。よって X_n の分散は

$$\begin{aligned}&21\left(\frac{5}{6}\right)^n + 15\left(\frac{3}{5}\right)^n - 36\left(\frac{25}{36}\right)^n\\&= 3\left\{\boldsymbol{7}\left(\boldsymbol{\frac{5}{6}}\right)^n - \boldsymbol{12}\left(\boldsymbol{\frac{25}{36}}\right)^n + \boldsymbol{5}\left(\boldsymbol{\frac{3}{5}}\right)^n\right\}\end{aligned}$$

である。

(3)　期待値の定義より，求める期待値は

$$\sum_{k=1}^{N}\left\{\frac{12}{35}\left(\frac{5}{6}\right)^n - \frac{10}{21}\left(\frac{3}{5}\right)^n\right\}2^{(N-k)} \tag{c}$$

である。(c) を計算して，求める答えは

$$\begin{aligned}&(c)\\&= 2^N\sum_{k=1}^{N}\left\{\frac{12}{35}\left(\frac{5}{12}\right)^n - \frac{10}{21}\left(\frac{3}{10}\right)^n\right\}\\&= 2^N\left[\frac{12}{35}\left\{\frac{\frac{5}{12} - \left(\frac{5}{12}\right)^{N+1}}{1 - \frac{5}{12}}\right\} - \frac{10}{21}\left\{\frac{\frac{3}{10} - \left(\frac{3}{10}\right)^{N+1}}{1 - \frac{3}{10}}\right\}\right]\\&= \boldsymbol{\frac{2}{49}}\left\{\boldsymbol{2}^N\boldsymbol{-6}\left(\boldsymbol{\frac{5}{6}}\right)^N + \boldsymbol{5}\left(\boldsymbol{\frac{3}{5}}\right)^N\right\}\end{aligned}$$

である。

[III]

以下の文章の空欄に適切な数，記号または式を入れて文章を完成させなさい。また，設問 (5) に答えなさい。

以下の設問 (1)〜(7) を通じて，i を虚数単位とし，

$$z=\cos\frac{2}{7}\pi+i\sin\frac{2}{7}\pi,\quad a=z+\frac{1}{z}$$

とする。

(1) $z^r=1$ を満たす自然数 r の中で，最小のものを k とすると，$k=\boxed{（あ）}$ であり，どんな自然数 l に対しても，z^l は 1 の $\boxed{（あ）}$ 乗根である。$z-1\neq 0$ であるから，等式

$$\frac{z^k-1}{z-1}=0$$

が成り立つ。また，$a=2\cos\left(\boxed{（い）}\pi\right)$ である。ただし，$0<\boxed{（い）}<1$ とする。次に，a を用いて $z^2+\dfrac{1}{z^2}=\boxed{（う）}$，$z^3+\dfrac{1}{z^3}=\boxed{（え）}$ と表される。以上のことから，a は整数を係数とする 3 次方程式 $x^3+\boxed{（お）}x^2+\boxed{（か）}x+\boxed{（き）}=0$ の解であり，この方程式の a 以外の 2 つの解は

$$b=2\cos\left(\boxed{（く）}\pi\right),\quad c=2\cos\left(\boxed{（け）}\pi\right)$$

と表される。ただし，$0<\boxed{（く）}<\boxed{（け）}<1$ とする。

(2) 不等式 $\sqrt{m}<a<\sqrt{m+1}$ を満たす自然数 m は $\boxed{（こ）}$ である。

(3) 不等式 $\sqrt{\dfrac{n}{10}}<a<\sqrt{\dfrac{n+1}{10}}$ を満たす自然数 n は $\boxed{（さ）}$ である。

(4) a，$|b|$，$|c|$ の大小関係は，$\boxed{（し）}<\boxed{（す）}<\boxed{（せ）}$ である。ただし，$\boxed{（し）}$，$\boxed{（す）}$，$\boxed{（せ）}$ には，それぞれ a，$|b|$，$|c|$ のいずれか 1 つを記入しなさい。

(5) a，$|b|$，$|c|$ を 3 辺の長さとする三角形が存在するかどうか，理由とともに答えなさい。

(6) 複素数平面上の原点 O と 2 点 A(z^3)，B(iz) を考える。直線 OA に関して点 B と対称な点を表す複素数 γ は，a を用いて $\gamma=\boxed{（そ）}z^3+\boxed{（た）}iz$ と表される。ただし，$\boxed{（そ）}$，$\boxed{（た）}$ は実数とする。

(7) $w=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ とする。自然数 d が $1\leqq d\leqq 2026$ の範囲を動くとき，$|z^d+w^d|$ の最大値は $\boxed{（ち）}$ であり，$|z^d+w^d|=\boxed{（ち）}$ を満たす d の個数は $\boxed{（つ）}$ である。

解答

$z=\cos\dfrac{2}{7}\pi+i\sin\dfrac{2}{7}\pi,\ a=z+\dfrac{1}{z}$ とする。

(1) $z^n=1$ をみたすもの（自然数 n）の中で最小のものの値は

$$z\neq 1,\ z^2\neq 1,\ \ldots,\ z^6\neq 1$$

で $z^7=1$ となるから $\boldsymbol{k=7}$

どんな自然数 ℓ に対しても

$$(z^\ell)^7=(z^7)^\ell=1^\ell=1$$

なので、z^ℓ は 1 の **7** 乗根となる。$z-1 \neq 0$ に注意すると

$$\frac{z^7-1}{z-1}=0 \iff 1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6=0 \ \cdots ①$$

が成り立つ。また、

$$a=z+\frac{1}{z}=\cos\frac{2}{7}\pi+i\sin\frac{2}{7}\pi+\frac{1}{\cos\frac{2}{7}\pi+i\sin\frac{2}{7}\pi}=2\cos\frac{2}{7}\pi \ \cdots ②$$

であり、

$$z^2+\frac{1}{z^2}=\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-2\cdot z\cdot\frac{1}{z}=a^2-2 \ \cdots ③$$

$$z^3+\frac{1}{z^3}=\left(z+\frac{1}{z}\right)^3-3z\cdot\frac{1}{z}\left(z+\frac{1}{z}\right)=a^3-3a \ \cdots ④$$

と表されるから，①の両辺を $z^3 \neq 0$ で割ると

$$z^3+z^2+z+1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}=0$$

$$\left(z^3+\frac{1}{z^3}\right)+\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)+\left(z+\frac{1}{z}\right)+1=0$$

となることから，③, ④，および $z+\dfrac{1}{z}=a \cdots ⑤$ を代入して，a は

$$(a^3-3a)+(a^2-2)+a+1=0$$

$$\therefore\ a^3+a^2-2a-1=0$$

を満たす。よって，a を変数とする 3 次方程式は

$$\boldsymbol{x^3+x^2-2x-1=0} \cdots ⑥$$

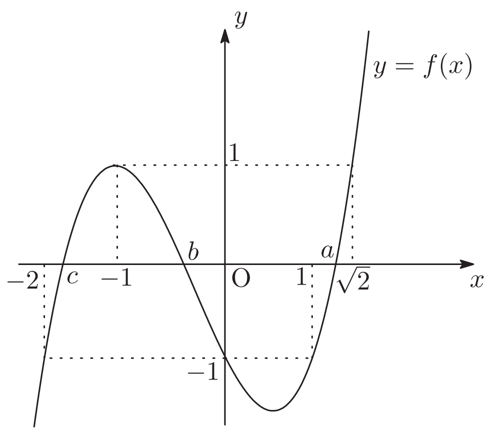
であり，⑤ は ① から作ったことから分かるように 1 の 7 乗根に現れる全ての実部を 2 倍したものが解になる。すなわち，残りの 2 解は

$$\boldsymbol{b=2\cos\frac{4}{7}\pi,\ c=2\cos\frac{6}{7}\pi}$$

(2)(3)　$f(x)=x^3+x^2-2x-1$ とおく。

$$f(2)=-1,\ f(-1)=1,\ f(0)=-1,\ f(2)=7$$

より，$y=f(x)$ のグラフは高々 3 カ所で x 軸と交わることが分かり，その解が $a,\ b,\ c$ であることから，概形は次図のようになる。



$f\left(\sqrt{2}\right) = \sqrt{2}^3 + \sqrt{2}^2 - 2\sqrt{2} - 1 = 1 > 0$ より $1 < a < \sqrt{2}$ なので，$\sqrt{m} < a < \sqrt{m+1}$ をみたす自然数 m は

$$\boldsymbol{m = 1}$$

また，

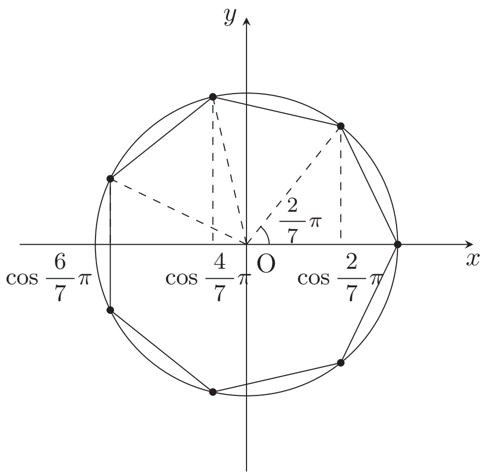
$$\begin{aligned}
f\left(\sqrt{1.4}\right) &= f\left(\frac{7}{5}\right) \\
&= \frac{7}{5}\sqrt{\frac{7}{5}} + \frac{7}{5} - 2\sqrt{\frac{7}{5}} - 1 \\
&= -\frac{3}{5}\sqrt{\frac{7}{5}} + \frac{2}{5} < 0 \\
f\left(\sqrt{1.5}\right) &= f\left(\frac{3}{2}\right) \\
&= \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} - 2\sqrt{\frac{3}{2}} - 1 \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} < 0 \\
f(\sqrt{1.6}) &= f\left(\frac{4}{\sqrt{10}}\right) \\
&= \frac{16}{10} \cdot \frac{4}{\sqrt{10}} + \frac{16}{10} - 2 \cdot \frac{4}{\sqrt{10}} - 1 \\
&= \frac{6}{10} - \frac{4}{10} \times \frac{4}{\sqrt{10}} \\
&= \frac{6\sqrt{10} - 16}{10\sqrt{10}} \\
&= \frac{\sqrt{360} - \sqrt{256}}{10\sqrt{10}} > 0
\end{aligned}$$

なので $\sqrt{\dfrac{n}{10}} < a < \sqrt{\dfrac{n+1}{10}}$ をみたす自然数 n は $\boldsymbol{n = 15}$ である。

(4)

$$\begin{aligned}
a &= 2\cos\frac{2}{7}\pi \\
b &= 2\cos\frac{4}{7}\pi \\
c &= 2\cos\frac{6}{7}\pi
\end{aligned}$$

であり，$\cos\dfrac{2}{7}\pi$，$\cos\dfrac{4}{7}\pi$，$\cos\dfrac{6}{7}$ の値は次の図のようになる。



図より,

$$|\boldsymbol{b}| < \boldsymbol{a} < |\boldsymbol{c}|$$

(5)　(4) の結果をふまえると,

$a,\ |b|,\ |c|$ を 3 辺の長さとする三角形が存在する

$\iff |c| < a + |b|\ (b,\ c < 0$ より$)$

$\iff -c < a - b\ \cdots$⑦

である。$a,\ b,\ c$ は ⑦ の相異なる実数解だから，解と係数の関係より

$$a + b + c = -1 \cdots ⑧$$

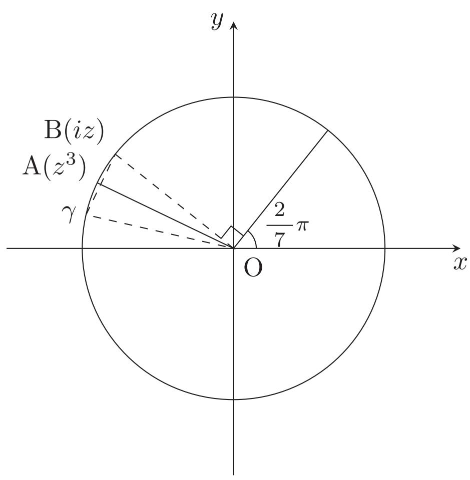
が成り立つことに注意すると,

$$\begin{aligned} a - b - (-c) &= a - b + c \\ &= a - b + (-1 - a - b) \\ &= -2b - 1 < 0 \end{aligned}$$

なので　$a - b < -c$ である。

ゆえに，$a + |b| < |c|$ となり ⑦ は成立しない。よって，**題意をみたす三角形は存在しない**。

(6)　$\mathrm{A}(z^3),\ \mathrm{B}(iz)$ は複素数平面上で次図のような位置



$\arg(z^3) = \dfrac{6}{7}\pi,\ \arg(iz) = \dfrac{2}{7}\pi + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{11}{14}\pi$ より $\angle\mathrm{AOB} = \dfrac{\pi}{14}$ である。B から直線 OA に下ろした垂線の足を H とすると，$\mathrm{OH} = \cos\dfrac{\pi}{14}$ なので, H を表す複素数は $\left(\cos\dfrac{\pi}{14}\right)z^3$

γ の表す点を C とおけば，H は線分 BC の中点だから,

$$\frac{\gamma + iz}{2} = \left(\cos\frac{\pi}{14}\right)z^3$$
$$\therefore\ \gamma = 2\left(\cos\frac{\pi}{14}\right)z^3 - iz$$

ここで，$\cos\dfrac{\pi}{14}$ は,

$$\begin{aligned}\cos\frac{\pi}{14} &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{14}\right)\\ &= \sin\frac{3}{7}\pi\\ &= \sin\frac{4}{7}\pi\\ &= \sqrt{1 - \cos^2\frac{4}{7}\pi}\\ &= \sqrt{1 - \left\{\frac{1}{2}(a^2 - 2)\right\}^2}\\ &= a\sqrt{4 - a^2}\end{aligned}$$

ゆえに，$\boldsymbol{\gamma = a\sqrt{4 - a^2}z^3 - iz}$ である。

(7)　$w = \dfrac{1 + \sqrt{3}i}{2}$ とすると $|w| = 1,\ \arg(w) = \dfrac{\pi}{3}$

$z = \cos\dfrac{2}{7}\pi + i\sin\dfrac{2}{7}\pi$ より，$|z| = 1,\ \arg(z) = \dfrac{2}{7}\pi$ なので, $|z^d + w^d| \leqq |z|^d + |w|^d = 2$ が成り立つ（三角不等式）。等号成立は例えば $d = 42$ のとき,

$$\begin{aligned}|z^d + w^d| &= |\cos 12\pi + i\sin 12\pi + \cos 14\pi + i\sin 14\pi|\\ &= |1 + 1| = 2\end{aligned}$$

で成立するので, 最大値は **2** である。$|z^d + w^d| = 2\ (1 \leqq d \leqq 2026)$ をみたす d の個数は, 偏角の差が $2\pi\times$(整数) となるときだから,

$$\frac{\pi}{3}d - \frac{2}{7}\pi d = 2\pi \times k\ (k : \text{正の整数})$$

と表されるとき，変形して　$7d - 6d = 42k$　$\therefore\ d = 42k$

と表されるときだから, $1 \leqq d \leqq 2026$ にある 42 の倍数だけ存在する。

よって，d の個数は $2026 = 42 \times 48 + 10$ より **48** 個である。

[IV]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。ただし，根号を用いた分数は，分母を有理化した形で記入しなさい。

a を正の実数とし，x の関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\frac{1}{x-1}-\frac{a}{x^2}\quad(x>1)$$

と定める。

(1) 曲線 $y=f(x)$ が x 軸と接するとき，$a=$ $\boxed{(あ)}$ であり，その接点の x 座標は $\boxed{(い)}$ である。

(2) $a=$ $\boxed{(あ)}$ とする。関数 $f(x)$ は $x=$ $\boxed{(う)}$ で極大値 $\boxed{(え)}$ をとる。$c=$ $\boxed{(え)}$ とおくと，方程式 $f(x)=c$ の解は $x=$ $\boxed{(う)}$ および $x=$ $\boxed{(お)}$ であり，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=c$ で囲まれた部分の面積は，

$$\frac{\boxed{(か)}+\boxed{(き)}\sqrt{\boxed{(く)}}}{2}+\log\left(\frac{\boxed{(け)}+\boxed{(こ)}\sqrt{\boxed{(く)}}}{2}\right)$$

である。ただし，(か)〜(こ) は整数とする。

(3) 関数 $f(x)$ が極値をもつための必要十分条件は，$a>$ $\boxed{(さ)}$ である。

(4) $\alpha=$ $\boxed{(さ)}$ とおき，$a>\alpha$ とする。また，関数 $f(x)$ が極大値をとる x の値を $g(a)$ とする。$g(a)-3$ は，t についての 3 次方程式

$$t^3+\boxed{(し)}t^2+\boxed{(す)}t+\boxed{(せ)}=0$$

の解である。ここで，(し)，(す)，(せ) は，整数を係数とする a についての多項式とする。したがって，$\displaystyle\lim_{a\to\alpha+0}\frac{g(a)-3}{\sqrt{a-\alpha}}=$ $\boxed{(そ)}$ である。次に，x についての方程式 $f(x)=f(g(a))$ の $x=g(a)$ 以外のもう 1 つの解を $h(a)$ とすると，$\displaystyle\lim_{a\to\alpha+0}\frac{h(a)-3}{\sqrt{a-\alpha}}=$ $\boxed{(た)}$ である。さらに，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=f(g(a))$ で囲まれた部分の面積を $S(a)$ とすると，$\displaystyle\lim_{a\to\alpha+0}\frac{S(a)}{(a-\alpha)^2}=$ $\boxed{(ち)}$ である。

解答

(1) $f(x)$ を計算すると

$$f(x)=\frac{x^2-ax+a}{x^2(x-1)}$$

であるため，x 軸と接するとき，分子は重解を持つ。分子の判別式を D とすると $D=a^2-4a$ であるため，$a=\mathbf{4}$ である。特にこのとき分子は x^2-4x+4 であるため，x 座標は $\mathbf{2}$ である。

(2) $f(x)$ の導関数は

$$\begin{aligned}f'(x)&=-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{8}{x^3}\\&=-\frac{x^3-8(x-1)^2}{x^3(x-1)^2}\\&=-\frac{x^3-8x^2+16x-8}{x^3(x-1)^2}\end{aligned}$$

$$= -\frac{(x-2)(x^2-6x+4)}{x^3(x-1)^2}$$

と計算される。よって増減表は

x	(1)	$\cdots$	2	$\cdots$	$3+\sqrt{5}$	$\cdots$
$f'(x)$	$(\times)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$(\times)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

となる。よって $x = \mathbf{3+\sqrt{5}}$ で極大値をとる。極大値は

$$f\left(3+\sqrt{5}\right) = \frac{1}{2+\sqrt{5}} - \frac{4}{(3+\sqrt{5})^2} = \sqrt{5}-2-\frac{14-6\sqrt{5}}{4} = \boldsymbol{\frac{5\sqrt{5}-11}{2}}$$

である。

$f(x) = \dfrac{5\sqrt{5}-11}{2}$ の分母をはらうと

$$x^2-4x+4 = \frac{5\sqrt{5}-11}{2}(x^3-x^2)$$

である。$\dfrac{2}{5\sqrt{5}-11} = \dfrac{5\sqrt{5}+11}{2}$ に注意して整理すると

$$x^3 - \frac{13+5\sqrt{5}}{2}x^2 + (10\sqrt{5}+22)x - (10\sqrt{5}+22) = 0$$

となる。$y = f(x)$ は x 軸と $x = 3+\sqrt{5}$ で接するため，上の 3 次方程式は $3+\sqrt{5}$ を重解に持つ。もう 1 つの解を x_0 とおくと，解と係数の関係から

$$x_0 + 2(3+\sqrt{5}) = \frac{13+5\sqrt{5}}{2}$$

となるため，整理することで $x_0 = \boldsymbol{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$ である。

囲まれた部分の面積は

$$\int_{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}^{3+\sqrt{5}} \left(c - \frac{1}{x-1} + \frac{4}{x^2}\right) dx$$
$$= \left[cx - \log(x-1) - \frac{4}{x}\right]_{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}^{3+\sqrt{5}}$$
$$= \frac{5\sqrt{5}-11}{2}\left(3+\sqrt{5}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \log\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \times \frac{1}{2+\sqrt{5}}\right) - \frac{4}{3+\sqrt{5}} + \frac{8}{1+\sqrt{5}}$$
$$= \frac{5\sqrt{5}-11}{2}\,\frac{5+\sqrt{5}}{2} + \log\frac{7-3\sqrt{5}}{2} - (3-\sqrt{5}) + 2(\sqrt{5}-1)$$
$$= \boldsymbol{\frac{-25+13\sqrt{5}}{2} + \log\frac{7-3\sqrt{5}}{2}}$$

である。

(3) $f'(x) = -\dfrac{1}{(x-1)^2} + \dfrac{2a}{x^3}$ であったため，$-\dfrac{1}{(x-1)^2} + \dfrac{2a}{x^3} = 0$ の解を調べればよい。

$$-\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2a}{x^3} = -\frac{2}{x^3}\left(\frac{x^3}{2(x-1)^2} - a\right) \qquad \cdots\cdots(*)$$

である。この符号が $x>1$ で変わる条件を調べる。

以下，$p(x)=\dfrac{x^3}{2(x-1)^2}$ とおく。

$$p'(x)=\frac{3x^2}{2(x-1)^2}-\frac{2x^3}{2(x-1)^3}=\frac{x^2(x-3)}{2(x-1)^3}$$

であるため，増減表は

x	(1)	$\cdots$	3	$\cdots$
$p'(x)$	$(\times)$	$-$	0	$+$
$p(x)$	$(\times)$	$\searrow$		$\nearrow$

となる。よって，$x>1$ で $p(x)$ は最小値 $p(3)=\dfrac{27}{8}$ をとる。

ゆえに $(*)$ の符号が $x>1$ で変わる a の条件は $\boldsymbol{a>\dfrac{27}{8}}$ である。

(4) $\dfrac{x^3}{(x-1)^2}-a=\dfrac{x^3-ax^2+2ax-a}{(x-1)^2}$ であるため，$g(a)$ は $x^3-ax^2+2ax-a=0$ を満たす。$x=t+3$ を代入した方程式が求めるものである。

$$(t+3)^3-a(t+3)^2+2a(t+3)-a=t^3+9t^2-2at^2+27t-8at+27-8a$$

であるため，

$$\boldsymbol{t^3+(9-2a)t^2+(27-8a)t+(27-8a)=0}$$

は $g(a)-3$ を解に持つ。

$a-\alpha=a-\dfrac{27}{8}=\dfrac{1}{8}(8a-27)$ に注意すると

$$t^2(t+9-2a)-8(t+1)(a-\alpha)=0$$

と整理され，

$$\frac{t^2}{a-\alpha}=\frac{8(t+1)}{t+9-2a}$$

を得る。

(3) より $\displaystyle\lim_{a\to\alpha+0}g(a)=3$ である。これに注意すると

$$\begin{aligned}\lim_{a\to\alpha+0}\frac{\{g(a)-3\}^2}{a-\alpha}&=\lim_{a\to\alpha+0}\frac{8\{g(a)-2\}}{g(a)+6-2a}\\&=\frac{8}{3+6-2\cdot\frac{27}{8}}\\&=\frac{32}{9}\end{aligned}$$

である。よって，

$$\lim_{a\to\alpha+0}\frac{g(a)-3}{\sqrt{a-\alpha}}=\boldsymbol{\frac{4}{3}\sqrt{2}}$$

である。

$h(a)$ を $g(a)$ により表す。条件より $h(a)$ は

$$\frac{1}{x-1}-\frac{a}{x^2}=\frac{1}{g(a)-1}-\frac{a}{\{g(a)\}^2}$$

の解である。

整理すると

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺})-(\text{右辺}) &= \frac{1}{x-1}-\frac{1}{g(a)-1}-\frac{a}{x^2}+\frac{a}{\{g(a)\}^2} \\
&= \frac{g(a)-x}{(x-1)(g(a)-1)}-\frac{a(g(a)-x)(g(a)+x)}{x^2\{g(a)\}^2} \\
&= \{g(a)-x\}\left\{\frac{1}{(x-1)(g(a)-1)}-\frac{a(g(a)+x)}{x^2\{g(a)\}^2}\right\}
\end{aligned}
$$

となる。

ここで $g(a)$ が $f'(x)=0$ の解なので $a=\dfrac{\{g(a)\}^3}{2\{g(a)-1\}^2}$ を満たすことが分かる。これを代入して変形すると，

$$
\begin{aligned}
&\{g(a)-x\}\left\{\frac{1}{(x-1)(g(a)-1)}-\frac{a\{g(a)+x\}}{x^2\{g(a)\}^2}\right\}=0 \\
\Longleftrightarrow\ &\{g(a)-x\}\left\{\frac{1}{(x-1)(g(a)-1)}-\frac{\{g(a)\}^3}{2\{g(a)-1\}^2}\times\frac{\{g(a)+x\}}{x^2\{g(a)\}^2}\right\}=0 \\
\Longleftrightarrow\ &\{g(a)-x\}\left\{\frac{1}{(x-1)(g(a)-1)}-\frac{g(a)\{g(a)+x\}}{2x^2\{g(a)-1\}^2}\right\}=0 \\
\Longleftrightarrow\ &\{g(a)-x\}\frac{2x^2\{g(a)-1\}-g(a)\{g(a)+x\}(x-1)}{2x^2(x-1)\{g(a)-1\}^2}=0
\end{aligned}
$$

となる。分子を整理すると

$$
\begin{aligned}
&2x^2\{g(a)-1\}-g(a)\{g(a)+x\}(x-1) \\
&=2g(a)x^2-2x^2-g(a)x^2-\{g(a)\}^2x+g(a)x+\{g(a)\}^2 \\
&=\{g(a)-2\}x^2-g(a)\{g(a)-1\}x+\{g(a)\}^2 \\
&=\{x-g(a)\}\{\{g(a)-2\}x-g(a)\}
\end{aligned}
$$

であるため，$h(a)=\dfrac{g(a)}{g(a)-2}$ を得る。

こうして

$$
\begin{aligned}
\lim_{a\to\alpha+0}\frac{h(a)-3}{\sqrt{a-\alpha}} &= \lim_{a\to\alpha+0}\frac{\dfrac{g(a)}{g(a)-2}-3}{\sqrt{a-\alpha}} \\
&= \lim_{a\to\alpha+0}\frac{1}{g(a)-2}\cdot\frac{-2g(a)+6}{\sqrt{a-\alpha}} \\
&= \lim_{a\to\alpha+0}\frac{1}{g(a)-2}\cdot\frac{-2\{g(a)-3\}}{\sqrt{a-\alpha}} \\
&= \frac{1}{3-2}\cdot(-2)\cdot\frac{4}{3}\sqrt{2} \\
&= -2\times\frac{4}{3}\sqrt{2} \\
&= \boldsymbol{-\frac{8}{3}\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

を得る。

面積 $S(a)$ は

$$S(a)=\int_{h(a)}^{g(a)}\{f(g(a))-f(x)\}dx$$

である。前の計算より

$$f(g(a))-f(x)=\frac{g(a)-2}{2x^2(x-1)\{g(a)-1\}^2}\{x-g(a)\}^2\{x-h(a)\}$$

である。

$x>1$ において $x^2(x-1)$ は単調増加であるから $h(a)\leqq x\leqq g(a)$ の範囲で

$$\{h(a)\}^2\{h(a)-1\}\leqq x^2(x-1)\leqq\{g(a)\}^2\{g(a)-1\}$$

である。よって

$$I=\int_{h(a)}^{g(a)}\{x-g(a)\}^2\{x-h(a)\}dx$$

とおくと

$$\frac{g(a)-2}{2\{g(a)\}^2\{g(a)-1\}^3}\{x-g(a)\}^2I\leqq S(a)\leqq\frac{g(a)-2}{2\{h(a)\}^2\{g(a)-1\}^2\{h(a)-1\}}I$$

である。

$\displaystyle\lim_{a\to\alpha+0}g(a)=3$ より

$$\lim_{a\to\alpha+0}\frac{g(a)-2}{2\{g(a)\}^2\{g(a)-1\}^3}=\frac{1}{2\times9\times8}=\frac{1}{144}$$

である。同様に

$$\lim_{a\to\alpha+0}\frac{g(a)-2}{2\{h(a)\}^2\{g(a)-1\}^2\{h(a)-1\}}=\frac{1}{144}$$

である。

$\dfrac{1}{12}$ 公式より

$$I=\frac{1}{12}\{g(a)-h(a)\}^4$$

である。$h(a)=\dfrac{g(a)}{g(a)-2}$ を代入することで

$$I=\frac{1}{12}\left\{g(a)-\frac{g(a)}{g(a)-2}\right\}^4=\frac{1}{12}\left\{\frac{g(a)\{g(a)-3\}}{g(a)-2}\right\}^4$$

である。ゆえに

$$\lim_{a\to\alpha+0}\frac{I}{(a-\alpha)^2}=\lim_{a\to\alpha+0}\frac{1}{12}\left\{\frac{g(a)}{g(a)-2}\right\}^4\times\left\{\frac{g(a)-3}{\sqrt{a-\alpha}}\right\}^4=\frac{1}{12}\times81\times\frac{1024}{81}=\frac{1024}{12}$$

である。

以上より

$$\lim_{a\to\alpha+0}\frac{1}{(a-\alpha)^2}\times\frac{g(a)-2}{2\{g(a)\}^2\{g(a)-1\}^3}\{x-g(a)\}^2I=\frac{1}{144}\times\frac{1024}{12}=\frac{16}{27}$$

$$\lim_{a\to\alpha+0}\frac{1}{(a-\alpha)^2}\times\frac{g(a)-2}{2\{h(a)\}^2\{g(a)-1\}^2\{h(a)-1\}}I=\frac{1}{144}\times\frac{1024}{12}=\frac{16}{27}$$

であるため，はさみうちの原理により

$$\lim_{a \to \alpha+0} \frac{S(a)}{(a-\alpha)^2} = \boldsymbol{\frac{16}{27}}$$

である。

講評

［Ｉ］［小問集合］（やや易）

：(1) 確率分布，(2) 集合と論理，(3) 空間座標からの出題であった。本学としては、どれも基本的な内容であった。昨年度に引き続き確率分布が出題された。

［II］［確率，数列］（標準）

：前半は基本的な漸化式の出題であった。昨年に引き続き，期待値も出題された。(3) の期待値の計算がやや煩雑であるが，ミスなく計算したい。

［III］［複素数平面］（やや難）

：複素数平面、三角関数の値の評価に関する問題であった。(2) までは複素数平面の典型的な問題で落とせない。(3) から、細かな数値による評価があり，やや面倒であった。また，(6)(7) は (2)〜(5) とは独立に解答することができる。

［IV］［微積分、極限］（難）

：微積分と極限に関する問題であった。(3) までは誘導にしたがっていくことで解くことができる。(4) は極限に関する問題であるが，方程式の解に関する極限で，苦手としている受験生も多かったと思われる。見通しを持って計算する必要があるとともに，関数の評価をする必要もあるため，受験生にとっては相当難しかったのではないか。

昨年度と比べ同程度の問題レベルであった。計算が煩雑な問題が多く，試験時間の中でミスなく計算できたかどうかが差になったと考えられる。大問１が，昨年度よりやや得点しやすいため，一次突破ボーダーは 55〜60% 程度か。