解答速報

日本大学医学部 N方式（1期）二次試験　数学

2026年 2月 11日実施

［ I ］

つぎの定積分の値を求めなさい．

(1) $\displaystyle\int_0^{\log 2} e^{-2x}dx$

(2) $\displaystyle\int_1^{e} x\log x dx$

(3) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x+1}{x^2+1}dx$

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{8}} \sin^2 x\cos 2x dx$

解答

(1)

$$\begin{aligned}\int_0^{\log 2} e^{-2x}dx &= \left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^{\log 2}\\ &= -\frac{1}{2}\left(e^{-2\log 2}-e^0\right)\\ &= -\frac{1}{2}\left(e^{\log\frac{1}{4}}-1\right)\\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-1\right)=\boldsymbol{\frac{3}{8}}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\int_1^{e} x\log x dx &= \left[\frac{1}{2}x^2\log x\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x}dx\\ &= \frac{1}{2}e^2-0-\left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^e\\ &= \boldsymbol{\frac{e^2+1}{4}}\end{aligned}$$

(3)

$$\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x+1}{x^2+1}dx=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x}{x^2+1}dx+\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2+1}dx \quad \cdots\cdots ①$$

である。この右辺の第 1 項は

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{x^2+1}dx &= \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{2x}{x^2+1}dx \\ &= \frac{1}{2}\Big[\log(x^2+1)\Big]_0^{\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{2}\log 4 = \log 2\end{aligned}$$

であり，第 2 項は $x = \tan\theta$ とおくと

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+1}dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot(1+\tan^2\theta)d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta = \frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

となるから，①より

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x+1}{x^2+1}dx = \boldsymbol{\log 2 + \frac{\pi}{3}}$$

注釈　①のように積分を分けずに，最初から $x = \tan\theta$ とおいて置換積分してもよい。

(4)

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{8}} \sin^2 x\cos 2x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{1-\cos 2x}{2}\cdot\cos 2x dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{8}} (\cos 2x - \cos^2 2x)dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{8}} \left(\cos 2x - \frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx \\ &= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{8}} (2\cos 2x - 1 - \cos 4x)dx \\ &= \frac{1}{4}\Big[\sin 2x - x - \frac{1}{4}\sin 4x\Big]_0^{\frac{\pi}{8}} \\ &= \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{8} - \frac{\pi}{32} - \frac{1}{16}}\end{aligned}$$

[Ⅱ]

関数 $f(x)=e^{-(\log x)^2}$ に対して，原点を O とする座標平面上に曲線 $C: y=f(x)$ を考える．ただし，$x>0$ とする．C 上の点 $\mathrm{P}(x,\ f(x))$ に対して，P から x 軸へ下ろした垂線を PH とするとき，三角形 OPH の面積を S とする．このとき，以下の問いに答えなさい．

(1)　S の最大値を与える x の値と S の最大値を求めなさい．

(2)　曲線 C の変曲点の座標をすべて求めなさい．

$\boxed{\text{解答}}$

(1)　$x>0,\ f(x)>0$ より，$S=\dfrac{1}{2}xf(x)$ であるから

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dx}&=\frac{1}{2}\left\{1\cdot e^{-(\log x)^2}+xe^{-(\log x)^2}\cdot(-2\log x)\cdot\frac{1}{x}\right\}\\&=\frac{1}{2}e^{-(\log x)^2}(1-2\log x)\end{aligned}$$

したがって，増減は次のようになる。

x	(0)	$\cdots$	$e^{\frac{1}{2}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$

よって，S は $x=\boldsymbol{\sqrt{e}}$ のとき最大で，その値は $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}e^{\frac{1}{4}}}$ である。

(2)　$f(x)=e^{-(\log x)^2}$ より

$$\begin{aligned}f'(x)&=e^{-(\log x)^2}\cdot(-2\log x)\cdot\frac{1}{x}\\&=-2\cdot\frac{\log x}{x}e^{-(\log x)^2}\\f''(x)&=-2\left\{\frac{1-\log x}{x^2}e^{-(\log x)^2}+\frac{\log x}{x}e^{-(\log x)^2}\cdot(-2\log x)\cdot\frac{1}{x}\right\}\\&=-2e^{-(\log x)^2}\cdot\frac{-2(\log x)^2-\log x+1}{x^2}\\&=2e^{-(\log x)^2}\cdot\frac{(\log x+1)(2\log x-1)}{x^2}\end{aligned}$$

$f''(x)=0$ とすると，$x=e^{-1},\ e^{\frac{1}{2}}$ であり，これらの x の値の前後で $f''(x)$ は符号変化する。
よって，変曲点は $\boldsymbol{\left(e^{\frac{1}{2}},\ e^{-\frac{1}{4}}\right)}$，$\boldsymbol{\left(e^{-1},\ e^{-1}\right)}$ である。

[III]

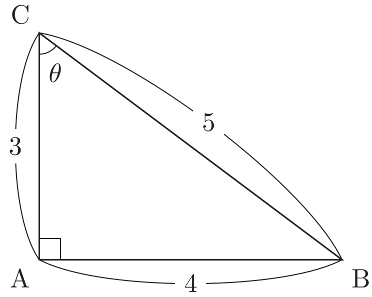
三角形 ABC は $\angle \mathrm{A} = \dfrac{\pi}{2}$ の直角三角形であり，$\mathrm{AB} = 4,\ \mathrm{BC} = 5,\ \mathrm{CA} = 3$ を満たしている．三角形 ABC の内接円を C_1 とし，その半径を r_1 で表す．つぎに，円 C_1 と外接し，かつ，辺 BC および CA の両方に接する円を C_2 とし，その半径を r_2 とする．以下，同様に，$n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ に対して，円 C_n と外接し，辺 BC および CA の両方に接する円を C_{n+1} とし，その半径を r_{n+1} とする．ただし，$r_{n+1} < r_n,\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ とする．$\angle \mathrm{C} = \theta$ とおくとき，以下の問いに答えなさい．

(1) $\tan \dfrac{\theta}{2}$ の値を求めなさい．

(2) 数列 $\{r_n\}$ の一般項を求めなさい．

(3) 円 C_n の面積を S_n で表すとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ を求めなさい．

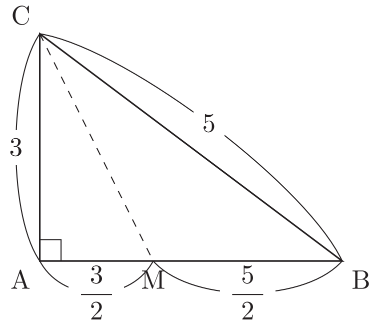
解答



(1) 角 C の二等分線と辺 AB の交点を M とおく。このとき $\angle \mathrm{MCA} = \dfrac{\theta}{2}$ である。角の二等分線の性質より

$$\mathrm{AM} : \mathrm{MB} = \mathrm{CA} : \mathrm{BC} = 3 : 5$$

である。よって $\mathrm{AM} = \dfrac{3}{2}$ である。ゆえに $\tan \dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\frac{3}{2}}{3} = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$ である。



(2) 三角形の面積に注意すると

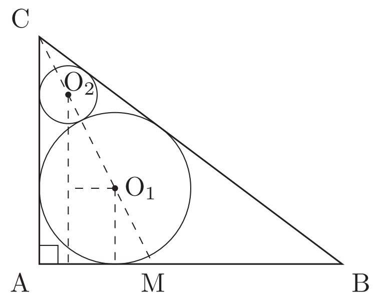
$$\frac{1}{2} r_1 (\mathrm{AB} + \mathrm{BC} + \mathrm{CA}) = \triangle \mathrm{ABC} = 6$$

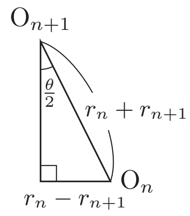
であるため，$r_1 = 1$ である。

以下，円 C_n の中心を O_n で表す。点 O_n は，直線 CM 上にあるため，下図より

$$\frac{r_n - r_{n+1}}{r_n + r_{n+1}} = \sin \frac{\theta}{2}$$

である。





(2) より $\tan\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1}{2}$ であるため，$\sin\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ である。よって

$$\frac{r_n - r_{n+1}}{r_n + r_{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

である。これを整理して

$$r_{n+1} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right) r_n$$

であるため，

$$r_n = r_1 \left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right)^{n-1} = \boldsymbol{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right)^{n-1}}$$

である。

(3)　(2) より $S_n = \pi\left\{\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right)^2\right\}^{n-1}$ であるため，$0 < \left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right)^2 < 1$ から

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} S_n &= 1 \cdot \frac{1}{1 - \left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right)^2}\pi \\ &= \frac{(\sqrt{5}+1)^2}{(\sqrt{5}+1)^2 - (\sqrt{5}-1)^2}\pi \\ &= \frac{6+2\sqrt{5}}{4\sqrt{5}}\pi \\ &= \boldsymbol{\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\pi}\end{aligned}$$

である。

講評

［Ｉ］［小問集合］(易) ：積分計算からの出題であった。どれも平易な内容で落とせない。

［Ⅱ］［数Ⅲ微分法］（やや易）：指数関数と対数関数の合成関数に関する出題であった。考え方は平易で計算がやや複雑であるが，時間を考えれば丁寧に計算していけばよいだけである。ここも落としたくない。

［Ⅲ］［極限］（やや易）：無限級数からの出題であった。典型的な出題で，例年 1 次試験 (N1) で見られた出題が 2 次試験で出題された。特に難しい考え方なく，ここも落としたくない。

昨年度に比べると易化した。どれも典型的な出題で解法も決まっているものばかりであった。時間も考えれば正規合格ラインには 1 題も落とせないのではないだろうか。