解答速報

日本医科大学（前期）　数学

2026年 2月 2日実施

[I]

中が見える番号付きの 4 つの箱，箱 1，箱 2，箱 3，箱 4 がある。箱の外に互いに区別のつかない球が十分多くある。1 から 6 の目が等確率で出る 1 つのさいころを 1 回投げて出た目を n とするとき，n の値に応じて以下の操作を行う。

[操作 1]　$n=1,\ 2,\ 3,\ 4$ の場合，箱の外にある 1 個の球を箱 n に入れる。
[操作 2]　$n=5$ の場合，箱 1 と箱 2 のそれぞれに 1 個ずつ箱の外の球を入れる。
[操作 3]　$n=6$ の場合，箱 1 と箱 3 のそれぞれに 1 個ずつ箱の外の球を入れる。

以上の操作で，1 度箱に入れた球はもとに戻さない。

さいころを 3 回続けて投げたとき，箱 k $(k=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ に入っている球の個数を N_k とする。
以下の各問いの空欄に適する 1 以上の整数を求めよ。ただし，分数は既約分数で答えること。

問 1　$N_1=1$ である確率は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ となる。

問 2　$N_2=1$ である確率は $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ となる。

問 3　$N_4=1$ である確率は $\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ となる。

問 4　$N_1=1$ という条件のもとで，$N_2=1$ である確率は $\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ となる。

解答

問 1　$N_1=1$ となるのは，さいころを 3 回投げたときに，
1，5，6 のいずれかの目が 1 回，
残りの 2 回は 2，3，4 のいずれかの目が出るときであるから，
その確率は，

$$ {}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2=\boldsymbol{\frac{3}{8}} $$

問 2　$N_2=1$ となるのは，さいころを 3 回投げたときに，
2，5 のいずれかの目が 1 回，
残りの 2 回は 1，2，3，4 のいずれかの目が出るときであるから，
その確率は，

$$ {}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{9}} $$

問 3　$N_4=1$ となるのは，さいころを 3 回投げたときに，
4 の目が 1 回，
残りの 2 回は 1，2，3，5，6 のいずれかの目が出るときであるから，
その確率は，

$$ {}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{\mathbf{25}}{\mathbf{72}} $$

問 4　$N_1=1$，$N_2=1$ となる事象をそれぞれ A，B とすると，求める確率は

$$ P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)} $$

である。
(問 1) より，$P(A)=\dfrac{3}{8}$ である。
また，$A\cap B$ は箱 1 と箱 2 にそれぞれ球がちょうど 1 個ずつ入る事象であるが，
これが満たされるのは，3 回さいころを投げたときに

$$ \begin{cases} \text{(i) 1 の目, 2 の目が 1 回ずつ, 3 または 4 の目が 1 回出る} \\ \text{(ii) 2 の目, 6 の目が 1 回ずつ, 3 または 4 の目が 1 回出る} \\ \text{(iii) 5 の目が 1 回, 3 または 4 の目が 2 回出る} \end{cases} $$

のいずれかが起こるときである。
(i)(ii) の確率はそれぞれ

$$ 3!\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\frac{2}{6}=\frac{1}{18} $$

であり，
(iii) の確率は

$$ 3\times\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{2}{6}\right)^2=\frac{1}{18} $$

である。
したがって，

$$ P(A\cap B)=\frac{1}{18}+\frac{1}{18}+\frac{1}{18}=\frac{1}{6} $$

よって，求める確率は

$$ P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{p(A)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{8}}=\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{9}} $$

[Ⅱ]

O を原点とする座標空間において，3 点 A(1, 2, 4), B(3, 1, 2), C(−1, 2, 5) を通る平面を π とする。π に関して点 D(2, 4, 1) と対称な点を E とし，△BCD の重心を G とする。E を中心とし，G を通る球面を S とする。また，S と π との交わりである円を K とする。

問 1　π の方程式を求めよ。答えのみでよい。

問 2　E の座標を求めよ。答えのみでよい。

問 3　K の中心の座標と半径をそれぞれ求めよ。答えのみでよい。

問 4　K 上の点 P に対して，2 点 G, P 間の距離を d_{P} とおく。点 P が K 上を動くとき，$(d_{\mathrm{P}})^2$ の最小値を求めよ。

解答

(1)　3 点 A(1, 2, 4), B(3, 1, 2), C(−1, 2, 5) を通る平面 π の方程式を求める。

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (2,\ -1,\ -2),\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (-2,\ 0,\ 1)$$

であるから，平面 π の法線ベクトルの 1 つを $\overrightarrow{n} = (1,\ a,\ b)$ とおくと，$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0$ かつ $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0$ が成り立つので

$$\begin{cases} 2 - b - 2c = 0 \\ -2 + c = 0 \end{cases}$$

を解いて　$(b,\ c) = (-2,\ 2)$

よって，$\overrightarrow{n} = (1,\ -2,\ 2)$ であり，A(1, 2, 4) を通ることから，平面の方程式は次のようになる。

$$1(x-1) - 2(y-2) + 2(z-4) \qquad = 0$$

$$\therefore\ \boldsymbol{x - 2y + 2z - 5 = 0}\quad \cdots\cdots ①$$

注釈

外積を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の両方に垂直なベクトルを求めてもよい。

(2)　点 D(2, 4, 1) を通り，平面 π に垂直な直線の方程式は，パラメータ t を用いて次のように表される。

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= \overrightarrow{\mathrm{OD}} + t\,\overrightarrow{n} \\ &= (2+t,\ 4-2t,\ 1+2t)\quad \cdots\cdots ②\end{aligned}$$

この直線と平面 π との交点となるときの t の値は②を①に代入して，

$$(2+t) - 2(4-2t) + 2(1+2t) - 5 = 0 \iff t = 1$$

したがって，点 E は平面 π に関して D と対称な点であるため，$t = 2$ を ②に代入して

$$\mathbf{E(4,\ 0,\ 5)}$$

(3)　△BCD の重心 G の座標は以下の通りである。

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OG}} &= \frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{OD}}}{3} \\ &= \left(\frac{3-1+2}{3}, \frac{1+2+4}{3}, \frac{2+5+1}{3}\right) \\ &= \left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{8}{3}\right)\end{aligned}$$

球面 S の中心は E(4, 0, 5) であり，G を通るため，球面 S の半径を R とすると，

$$\begin{aligned} R^2 &= \mathrm{EG}^2 \\ &= \left(4-\frac{4}{3}\right)^2+\left(0-\frac{7}{3}\right)^2+\left(5-\frac{8}{3}\right)^2 \\ &= 18 \end{aligned}$$

円 K は球面 S と平面 π の交わりであるため，円 K の中心は，中心 E から平面 π へ下ろした垂線の足（H とする。）であり，点 H の座標は $t=1$ を②に代入することで

$$\mathbf{H(3,\ 2,\ 3)}$$

を得る。円 K の半径を r とすると，三平方の定理から

$$r^2 = R^2 - \mathrm{EH}^2$$

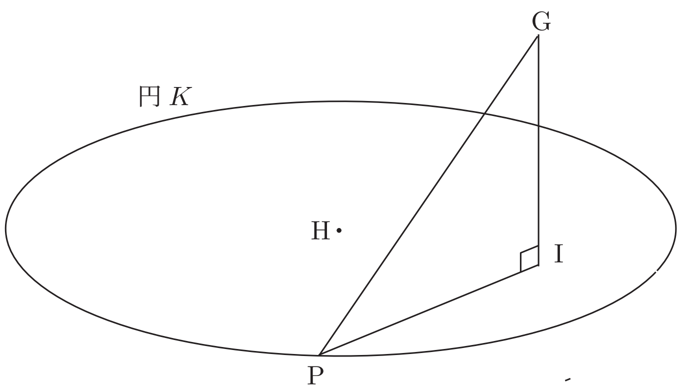
ここで，$\mathrm{EH}^2=(3-4)^2+(2-0)^2+(3-5)^2=9$ であることから，

$$\boldsymbol{r=3}$$

(4)　点 G から平面 π に下ろした垂線の足を I とする。$\overrightarrow{\mathrm{GI}}$ は法線ベクトル $\overrightarrow{n}=(1,\ -2,\ 2)$ に平行であることから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{GI}} &= \overrightarrow{\mathrm{OG}}+\overrightarrow{\mathrm{GI}} \\ &= \left(\frac{4}{3},\ \frac{7}{3},\ \frac{8}{3}\right)+t(1,\ -2,\ 2) \\ &= \left(\frac{4}{3}+t,\ \frac{7}{3}-2t,\ \frac{8}{3}+2t\right) \end{aligned}$$

これを①に代入して $t=\dfrac{1}{3}$ を得るため，点 I の座標は $\left(\dfrac{5}{3}, \dfrac{5}{3}, \dfrac{10}{3}\right)$ である。



よって，G と平面 π の距離は $\mathrm{GI}=1$ である。三平方の定理より，

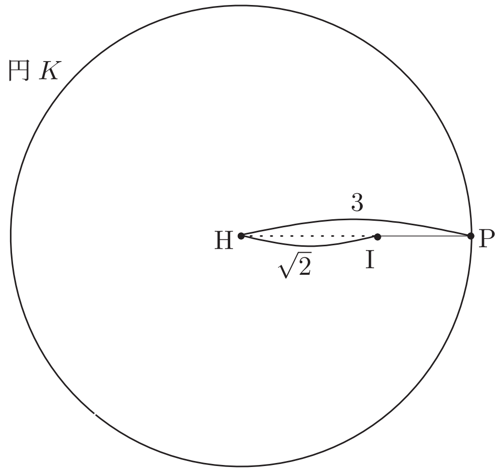
$$(d_{\mathrm{P}})^2=\mathrm{GP}^2=\mathrm{GI}^2+\mathrm{IP}^2=1+\mathrm{IP}^2$$

である。この値を最小にするには，円 K 上の点 P と I の距離 IP を最小にすればよい。
円 K の中心 H(3, 2, 3) と I の距離は,

$$\mathrm{HI}=\sqrt{\left(3-\frac{5}{3}\right)^2+\left(2-\frac{5}{3}\right)^2+\left(3-\frac{10}{3}\right)^2}=\sqrt{2}$$

I は円 K の内部にある（$\sqrt{2} < 3$）ため，IP の最小値は $3 - \sqrt{2}$ である。したがって，$(d_{\mathrm{P}})^2$ の最小値は,

$$1 + (3 - \sqrt{2})^2 = \mathbf{12 - 6\sqrt{2}}$$



[III]

O を原点とする座標平面において，曲線 C_1 を $C_1 : y = \dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$ とし， C_1 上の点 $\mathrm{P}\left(t,\ \dfrac{1}{t}\right)$ における C_1 の接線を L とする。 O から L に垂線 OH を下ろし， $\mathrm{H}(x(t),\ y(t))$ と表す。点 P が C_1 上を動くときの H の軌跡を C_2 とする。実数の定数 r は $0 < r < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ を満たすとし，点 $\left(1 - \dfrac{r}{\sqrt{2}},\ 1 - \dfrac{r}{\sqrt{2}}\right)$ を中心とする半径 r の円を $C(r)$ とする。 C_2 と $C(r)$ の共有点の個数を $N(r)$ とするとき，以下の各問いに答えよ。

問 1　L の方程式を求めよ。答えのみでよい。

問 2　$x(t),\ y(t)$ をそれぞれ t で表せ。

問 3　$\mathrm{N}(r)$ を求めよ。

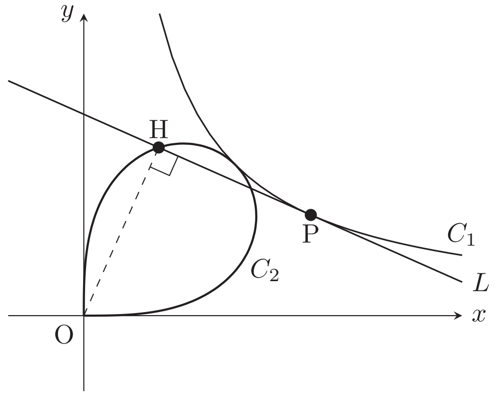
解答

問 1　$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$ であるため，$\left(t,\ \dfrac{1}{t}\right)$ における接線の傾きは $-\dfrac{1}{t^2}$ である。よって，接線の式は $y = -\dfrac{1}{t^2}(x - t) + \dfrac{1}{t} = \boldsymbol{-\dfrac{1}{t^2}x + \dfrac{2}{t}}$ となる。

問 2　直線 OH と L は直交するため，直線 OH の傾きは t^2 である。よって，直線 OH の式は $y = t^2x$ となる。点 H の座標は

$$\begin{cases} y = t^2x \\ y = -\dfrac{x}{t^2} + \dfrac{2}{t} \end{cases}$$

の解である。よって，$x(t) = \boldsymbol{\dfrac{2t}{t^4 + 1}}$，$y(t) = \boldsymbol{\dfrac{2t^3}{t^4 + 1}}$ である。



問 3　$(x(t),\ y(t))$ が C_2 と $C(r)$ の共有点であるとき，

$$\left\{x(t) - \left(1 - \frac{r}{\sqrt{2}}\right)\right\}^2 + \left\{y(t) - \left(1 - \frac{r}{\sqrt{2}}\right)\right\}^2 = r^2$$

が成立する。展開して整理すると

$$\{x(t)\}^2 + \{y(t)\}^2 - 2\left(1 - \frac{r}{\sqrt{2}}\right)\{x(t) + y(t)\} + 2 - 2\sqrt{2}r = 0$$

となる。問 2 の結果を代入すると

$$\frac{4t^2}{t^4 + 1} - 2\left(1 - \frac{r}{\sqrt{2}}\right)\frac{2t(t^2 + 1)}{t^4 + 1} + 2 - 2\sqrt{2}r = 0$$

となる。左辺を r で整理すると

$$\frac{t^4-2t^3+2t^2-2t+1}{t^4+1}\times 2+\frac{t^4-t^3-t+1}{t^4+1}\times 2\sqrt{2}r=0$$

となる。$t^4-2t^3+2t^2-2t+1=(t-1)^2(t^2+1)$，$t^4-t^3-t+1=(t-1)(t^3-1)$ と因数分解されることに注意すると

$$(t-1)\{t^2+1+(t^2+t+1)\sqrt{2}r\}=0$$

が得られる。よって，r の値に寄らず $(x(1),\ y(1))$ は C_2 と $C(r)$ の交点になる。

また，二次方程式 $t^2+1+(t^2+t+1)\sqrt{2}r=(\sqrt{2}r-1)t^2+\sqrt{2}rt+(\sqrt{2}r-1)=0$ の判別式を D とすると

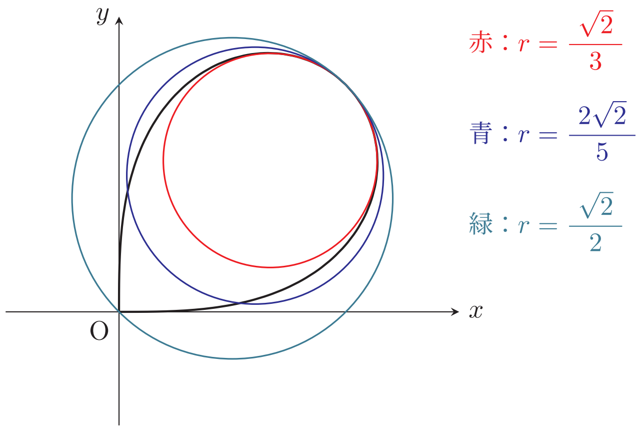
$$D=2r^2-4(\sqrt{2}r-1)^2=-6r^2+8\sqrt{2}r-4=-2(2r-\sqrt{2})(3r-\sqrt{2})$$

である。$0<r<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ と合わせると

- $0<r<\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ のとき，$(x(1),\ y(1))$ 以外に C_2 と $C(r)$ の交点は存在しない。
- $r=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ のとき。
  二次方程式 $(\sqrt{2}r-1)t^2+\sqrt{2}rt+(\sqrt{2}r-1)=0$ に r を代入すると $-\dfrac{1}{3}t^2+\dfrac{2}{3}t-\dfrac{1}{2}=0$ である。これは重解 $t=1$ を持つ。よって $(x(1),\ y(1))$ 以外に C_2 と $C(r)$ の交点は存在しない。
- $r>\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ のとき。
  二次方程式 $(\sqrt{2}r-1)t^2+\sqrt{2}rt+(\sqrt{2}r-1)=0$ は異なる 2 実数解を持つ。左辺に $t=1$ を代入すると $3\sqrt{2}r-2$ となる。今 $r>\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ であるため，$3\sqrt{2}r-2\fallingdotseq 0$ であるため，$t=1$ が解になることはない。よって，C_2 と $C(r)$ の交点は 3 つ存在する。

  以上より

$$\boldsymbol{N(r)=\begin{cases}1 & \left(0<r\leqq\dfrac{\sqrt{2}}{3}\ \text{のとき}\right)\\ 3 & \left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}<r<\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ \text{のとき}\right)\end{cases}}$$



$\boxed{\text{注釈}}$

C_2 のパラメータ t を削除すると $(x^2+y^2)^2=4xy$ となる。これはレムニスケート関数を 45° 回転させたものである。

[IV]

以下の各問いに答えよ。

a を正の定数とする。区間 $0 \leqq x < a$ で定義された関数 $f(x)$ は微分可能であり，以下の 3 条件を満たすとする。

(i)　実数 t は $0 \leqq t < a$ を満たすとする。O を原点とする xy 平面上の曲線 $C: y = f(x)$ の区間 $0 \leqq x \leqq t$ における長さが $a\log\left(\dfrac{a+t}{a-t}\right) - t$ に等しい。

(ii)　$f'(x) \leqq 0$ （ただし，$0 \leqq x < a$）

(iii)　$f\left(\dfrac{a}{2}\right) = 0$

問 1　関数 $f(x)$ を求め，$y = f(x)$ のグラフの概形をかけ。凹凸も調べよ。

問 2　a は $0 < a < 1$ を満たすとする。曲線 C と x 軸および y 軸によって囲まれた部分の面積を $S_1(a)$ とする。C 上の点 P$\left(\dfrac{a}{2}, 0\right)$ における接線を L とし，L と y 軸との交点を Q とする。線分 PQ を $(2-a):(1+a)$ に内分する点を R とし，三角形 OPR の面積を $S_2(a)$ とするとき，$S_1(a)$ と $S_2(a)$ の大小関係を調べよ。必要ならば，$1.09 < \log 3 < 1.10$ であることを用いてよい。

解答

問 1　条件 (i) により

$$\int_0^t \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx = a\log\left(\frac{a+t}{a-t}\right) - t$$
$$= a\{\log(a+t) - \log(a-t)\} - t \quad (\because 0 \leqq t < a)$$

両辺を t で微分すると

$$\sqrt{1+\{f'(t)\}}^2 = a\left\{\frac{1}{a+t} - \frac{-1}{a-t}\right\} - 1$$
$$= \frac{a^2+t^2}{a^2-t^2}$$

両辺正より，2 乗しても同値性は崩れず

$$1+\{f'(t)\}^2 = \left\{\frac{a^2+t^2}{a^2-t^2}\right\}^2$$
$$\iff \{f'(t)\}^2 = \left\{\frac{2at}{a^2-t^2}\right\}^2$$
$$\iff f'(t) = \pm\frac{2at}{a^2-t^2}$$

条件 (i) の t の範囲と条件 (ii)，および a が正の実数であることに注意して，$f'(t) = \dfrac{2at}{t^2-a^2}$ となるので

$$f(t) = \int \frac{2at}{t^2-a^2}\,dt$$
$$= a\int \frac{(t^2-a^2)'}{t^2-a^2}\,dt$$
$$= a\log|t^2-a^2| + C \quad (C \text{ は積分定数})$$
$$= a\log(a^2-t^2) + C \quad (\because 0 \leqq t < a)$$

条件 (iii) により $C = -a\log\dfrac{3}{4}a^2$ となるので

$$\begin{aligned} f(t) &= a\log(a^2-t^2) - a\log\frac{3}{4}a^2 \\ &= a\log\frac{4(a^2-t^2)}{3a^2} \end{aligned}$$

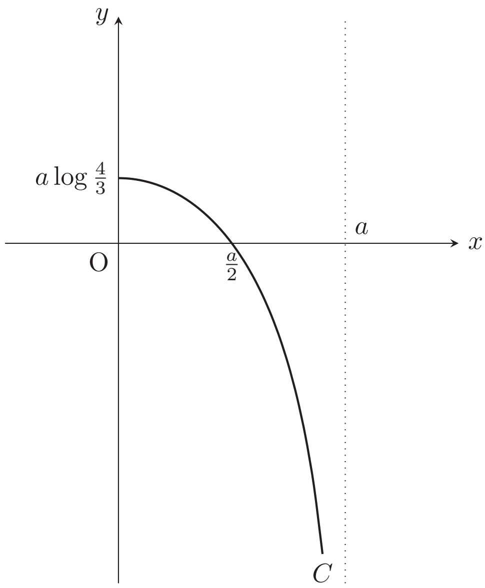
よって，$f(x) = \boldsymbol{a\log\dfrac{4(a^2-x^2)}{3a^2}}$ である。

また，$0 \leqq x < a$ より

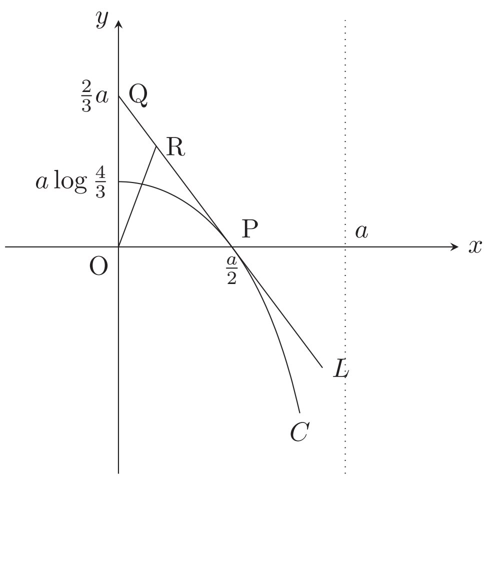
$$f'(x) = \frac{2ax}{x^2-a^2} < 0,\ f''(x) = \frac{-2a(x^2+a^2)}{(x^2-a^2)^2} < 0$$

となるので，$f(x)$ は上に凸な単調減少な関数である。

$f(0) = a\log\dfrac{4}{3}$，$\displaystyle\lim_{x\to a-0} f(x) = -\infty$ であるので，$y = f(x)$ の概形は次のようになる。



問 2　接線 L の方程式を求めると，$y = -\dfrac{4}{3}x + \dfrac{2}{3}a$ である。



図より

$$
\begin{aligned}
S_1(a) &= \int_0^{\frac{a}{2}} f(x)dx \\
&= a\int_0^{\frac{a}{2}} \left\{\log(a+x)+\log(a-x)-\log\frac{4}{3}a^2\right\}dx \\
&= a\Big[(a+x)\log(a+x)-x-\{(a-x)\log(a-x)+x\}\Big]_0^{\frac{a}{2}} - \frac{a^2}{2}\log\frac{3}{4}a^2 \\
&= a^2(\log 3-1) \\
S_2(a) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{2}{3}a\times\frac{2-a}{(2-a)+(1+a)} \\
&= \frac{a^2(2-a)}{18}
\end{aligned}
$$

これより

$$
S_1(a)-S_2(a)=a^2\cdot\frac{a-(20-18\log 3)}{18}
$$

ここで，$1.09<\log 3<1.10 \iff 19.62<18\log 3<19.8$ より，$0<20-18\log 3<1$ である。
よって，$0<a<1$ のとき，求める大小関係は

$$
\begin{cases}
0<a<20-18\log 3 \text{ のとき} & S_1(a)<S_2(a) \\
a=20-18\log 3 \text{ のとき} & S_1(a)=S_2(a) \\
20-18\log 3<a<1 \text{ のとき} & S_2(a)<S_1(a)
\end{cases}
$$

講評

［Ⅰ］［確率］（やや易）：反復試行に関する確率の出題であった。本学にしては非常に解きやすい確率である。ここは落としたくない。

［Ⅱ］［空間座標］（標準）：空間座標からの出題であった。計算量も控えめで解きやすかったのではないだろうか。［Ⅰ］と合わせて完答を狙いたい。

［Ⅲ］［関数，媒介変数］（標準）：交点の軌跡と円の共有点に関する出題であった。問 3 では要領よく計算できたかがポイントであろう。

［Ⅳ］［数Ⅲ微積分］（標準）：微分方程式からの出題であった。文字の条件と計算に気をつけて問題を進めたい。内容自体は難しいものではないので，ミスなく進めたい。

昨年度に比べると易化した。全体的に計算量も控えめで昨年度同様，以前と比べて計算量が減ってきている。一次突破ボーダーは 65% 程度か。