

日本医科大学(前期) 数学

2026年 2月 2日実施

[I]

中が見える番号付きの4つの箱, 箱1, 箱2, 箱3, 箱4がある。箱の外に互いに区別のつかない球が十分多くある。1から6の目が等確率で出る1つのさいころを1回投げて出た目を n とすると、 n の値に応じて以下の操作を行う。

[操作1] $n = 1, 2, 3, 4$ の場合, 箱の外にある1個の球を箱 n に入れる。

[操作2] $n = 5$ の場合, 箱1と箱2のそれぞれに1個ずつ箱の外の球を入れる。

[操作3] $n = 6$ の場合, 箱1と箱3のそれぞれに1個ずつ箱の外の球を入れる。

以上の操作で, 1度箱に入れた球はもとに戻さない。

さいころを3回続けて投げたとき, 箱 k ($k = 1, 2, 3, 4$)に入っている球の個数を N_k とする。以下の各問の空欄に適する1以上の整数を求めよ。ただし, 分数は既約分数で答えること。

問1 $N_1 = 1$ である確率は $\frac{\text{ア}}{\text{イ}}$ となる。

問2 $N_2 = 1$ である確率は $\frac{\text{ウ}}{\text{エ}}$ となる。

問3 $N_4 = 1$ である確率は $\frac{\text{オ}}{\text{カ}}$ となる。

問4 $N_1 = 1$ という条件のもとで, $N_2 = 1$ である確率は $\frac{\text{キ}}{\text{ク}}$ となる。

解答

問1 $N_1 = 1$ となるのは, さいころを3回投げたときに,
1, 5, 6のいずれかの目が1回,
残りの2回は2, 3, 4のいずれかの目が出るときであるから,
その確率は,

$${}_3C_1 \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$$

問2 $N_2 = 1$ となるのは, さいころを3回投げたときに,
2, 5のいずれかの目が1回,
残りの2回は1, 2, 3, 4のいずれかの目が出るときであるから,
その確率は,

$${}^3C_1 \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

問3 $N_4 = 1$ となるのは、さいころを3回投げたときに、
 4の目が1回、
 残りの2回は1, 2, 3, 5, 6のいずれかの目が出るときであるから、
 その確率は、

$${}^3C_1 \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{72}$$

問4 $N_1 = 1, N_2 = 1$ となる事象をそれぞれ A, B とすると、求める確率は

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

である。

(問1) より、 $P(A) = \frac{3}{8}$ である。

また、 $A \cap B$ は箱1と箱2にそれぞれ球がちょうど1個ずつ入る事象であるが、
 これが満たされるのは、3回さいころを投げたときに

- $$\begin{cases} \text{(i) 1の目, 2の目が1回ずつ, 3または4の目が1回出る} \\ \text{(ii) 2の目, 6の目が1回ずつ, 3または4の目が1回出る} \\ \text{(iii) 5の目が1回, 3または4の目が2回出る} \end{cases}$$

のいずれかが起こるときである。

(i)(ii) の確率はそれぞれ

$$3! \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{18}$$

であり、

(iii) の確率は

$$3 \times \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^2 = \frac{1}{18}$$

である。

したがって、

$$P(A \cap B) = \frac{1}{18} + \frac{1}{18} + \frac{1}{18} = \frac{1}{6}$$

よって、求める確率は

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{p(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{8}} = \frac{4}{9}$$

[II]

O を原点とする座標空間において、3点 A(1, 2, 4), B(3, 1, 2), C(-1, 2, 5) を通る平面を π とする。 π に関して点 D(2, 4, 1) と対称な点を E とし、 $\triangle BCD$ の重心を G とする。E を中心とし、G を通る球面を S とする。また、S と π との交わりである円を K とする。

問1 π の方程式を求めよ。答えのみでよい。

問2 E の座標を求めよ。答えのみでよい。

問3 K の中心の座標と半径をそれぞれ求めよ。答えのみでよい。

問4 K 上の点 P に対して、2点 G, P 間の距離を d_P とおく。点 P が K 上を動くとき、 $(d_P)^2$ の最小値を求めよ。

解答

(1) 3点 A(1, 2, 4), B(3, 1, 2), C(-1, 2, 5) を通る平面 π の方程式を求める。

$$\vec{AB} = (2, -1, -2), \quad \vec{AC} = (-2, 0, 1)$$

であるから、平面 π の法線ベクトルの1つを $\vec{n} = (1, a, b)$ とおくと、 $\vec{n} \cdot \vec{AB} = 0$ かつ $\vec{n} \cdot \vec{AC} = 0$ が成り立つので

$$\begin{cases} 2 - b - 2c = 0 \\ -2 + c = 0 \end{cases}$$

を解いて $(b, c) = (-2, 2)$

よって、 $\vec{n} = (1, -2, 2)$ であり、A(1, 2, 4) を通ることから、平面の方程式は次のようになる。

$$1(x-1) - 2(y-2) + 2(z-4) = 0$$

$$\therefore x - 2y + 2z - 5 = 0 \quad \dots\dots ①$$

注釈

外積を用いて、 \vec{AB} と \vec{AC} の両方に垂直なベクトルを求めてもよい。

(2) 点 D(2, 4, 1) を通り、平面 π に垂直な直線の方程式は、パラメータ t を用いて次のように表される。

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= \vec{OD} + t\vec{n} \\ &= (2+t, 4-2t, 1+2t) \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

この直線と平面 π との交点となるとき t の値は②を①に代入して、

$$(2+t) - 2(4-2t) + 2(1+2t) - 5 = 0 \iff t = 1$$

したがって、点 E は平面 π に関して D と対称な点であるため、 $t = 2$ を②に代入して

$$\mathbf{E(4, 0, 5)}$$

(3) $\triangle BCD$ の重心 G の座標は以下の通りである。

$$\begin{aligned} \vec{OG} &= \frac{\vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}}{3} \\ &= \left(\frac{3-1+2}{3}, \frac{1+2+4}{3}, \frac{2+5+1}{3} \right) \\ &= \left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{8}{3} \right) \end{aligned}$$

球面 S の中心は $E(4, 0, 5)$ であり、 G を通るため、球面 S の半径を R とすると、

$$\begin{aligned} R^2 &= EG^2 \\ &= \left(4 - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(0 - \frac{7}{3}\right)^2 + \left(5 - \frac{8}{3}\right)^2 \\ &= 18 \end{aligned}$$

円 K は球面 S と平面 π の交わりであるため、円 K の中心は、中心 E から平面 π へ下ろした垂線の足 (H とする。) であり、点 H の座標は $t = 1$ を②に代入することで

$$\mathbf{H}(3, 2, 3)$$

を得る。円 K の半径を r とすると、三平方の定理から

$$r^2 = R^2 - EH^2$$

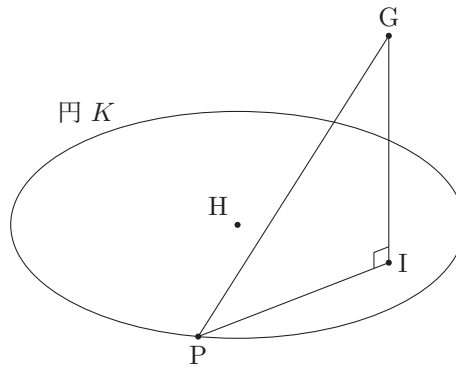
ここで、 $EH^2 = (3 - 4)^2 + (2 - 0)^2 + (3 - 5)^2 = 9$ であることから、

$$r = 3$$

(4) 点 G から平面 π に下ろした垂線の足を I とする。 \vec{GI} は法線ベクトル $\vec{n} = (1, -2, 2)$ に平行であることから

$$\begin{aligned} \vec{OI} &= \vec{OG} + \vec{GI} \\ &= \left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{8}{3}\right) + t(1, -2, 2) \\ &= \left(\frac{4}{3} + t, \frac{7}{3} - 2t, \frac{8}{3} + 2t\right) \end{aligned}$$

これを①に代入して $t = \frac{1}{3}$ を得るため、点 I の座標は $\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{10}{3}\right)$ である。



よって、 G と平面 π の距離は $GI = 1$ である。三平方の定理より、

$$(d_p)^2 = GP^2 = GI^2 + IP^2 = 1 + IP^2$$

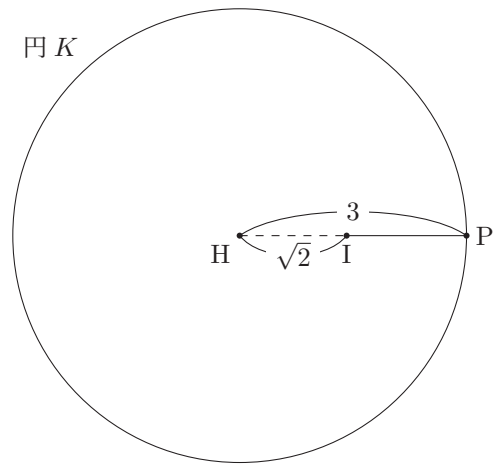
である。この値を最小にするには、円 K 上の点 P と I の距離 IP を最小にすればよい。

円 K の中心 $H(3, 2, 3)$ と I の距離は、

$$HI = \sqrt{\left(3 - \frac{5}{3}\right)^2 + \left(2 - \frac{5}{3}\right)^2 + \left(3 - \frac{10}{3}\right)^2} = \sqrt{2}$$

I は円 K の内部にある ($\sqrt{2} < 3$) ため、 IP の最小値は $3 - \sqrt{2}$ である。したがって、 $(d_p)^2$ の最小値は、

$$1 + (3 - \sqrt{2})^2 = 12 - 6\sqrt{2}$$



[III]

O を原点とする座標平面において、曲線 C_1 を $C_1 : y = \frac{1}{x}$ ($x > 0$) とし、 C_1 上の点 $P \left(t, \frac{1}{t} \right)$ における C_1 の接線を L とする。O から L に垂線 OH を下ろし、 $H(x(t), y(t))$ と表す。点 P が C_1 上を動くときの H の軌跡を C_2 とする。実数の定数 r は $0 < r < \frac{\sqrt{2}}{2}$ を満たすとし、点 $\left(1 - \frac{r}{\sqrt{2}}, 1 - \frac{r}{\sqrt{2}} \right)$ を中心とする半径 r の円を $C(r)$ とする。 C_2 と $C(r)$ の共有点の個数を $N(r)$ とするとき、以下の各問いに答えよ。

問1 L の方程式を求めよ。答えのみでよい。

問2 $x(t), y(t)$ をそれぞれ t で表せ。

問3 $N(r)$ を求めよ。

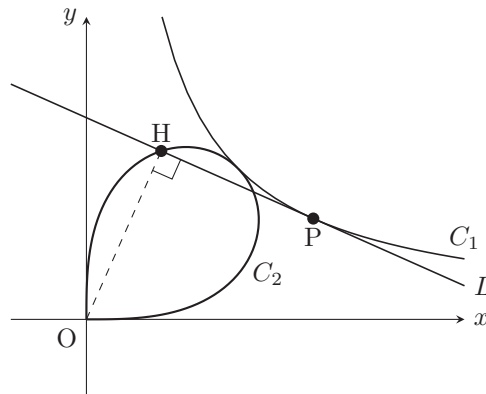
解答

問1 $\left(\frac{1}{x} \right)' = -\frac{1}{x^2}$ であるため、 $\left(t, \frac{1}{t} \right)$ における接線の傾きは $-\frac{1}{t^2}$ である。よって、接線の式は $y = -\frac{1}{t^2}(x-t) + \frac{1}{t} = -\frac{1}{t^2}x + \frac{2}{t}$ となる。

問2 直線 OH と L は直交するため、直線 OH の傾きは t^2 である。よって、直線 OH の式は $y = t^2x$ となる。点 H の座標は

$$\begin{cases} y = t^2x \\ y = -\frac{x}{t^2} + \frac{2}{t} \end{cases}$$

の解である。よって、 $x(t) = \frac{2t}{t^4 + 1}$, $y(t) = \frac{2t^3}{t^4 + 1}$ である。



問3 $(x(t), y(t))$ が C_2 と $C(r)$ の共有点であるとき、

$$\left\{ x(t) - \left(1 - \frac{r}{\sqrt{2}} \right) \right\}^2 + \left\{ y(t) - \left(1 - \frac{r}{\sqrt{2}} \right) \right\}^2 = r^2$$

が成立する。展開して整理すると

$$\{x(t)\}^2 + \{y(t)\}^2 - 2 \left(1 - \frac{r}{\sqrt{2}} \right) \{x(t) + y(t)\} + 2 - 2\sqrt{2}r = 0$$

となる。問2の結果を代入すると

$$\frac{4t^2}{t^4 + 1} - 2 \left(1 - \frac{r}{\sqrt{2}} \right) \frac{2t(t^2 + 1)}{t^4 + 1} + 2 - 2\sqrt{2}r = 0$$

となる。左辺を r で整理すると

$$\frac{t^4 - 2t^3 + 2t^2 - 2t + 1}{t^4 + 1} \times 2 - \frac{t^4 - t^3 - t + 1}{t^4 + 1} \times 2\sqrt{2}r = 0$$

となる。 $t^4 - 2t^3 + 2t^2 - 2t + 1 = (t-1)^2(t^2+1)$, $t^4 - t^3 - t + 1 = (t-1)(t^3-1)$ と因数分解されることに注意すると

$$(t-1)\{(t^2+t+1)\sqrt{2}r - (t^2+1)\} = 0$$

が得られる。よって、 r の値に寄らず $(x(1), y(1))$ は C_2 と $C(r)$ の交点になる。

また、二次方程式 $(t^2+t+1)\sqrt{2}r - (t^2+1) = (\sqrt{2}r-1)t^2 + \sqrt{2}rt + (\sqrt{2}r-1) = 0$ の判別式を D とすると

$$D = 2r^2 - 4(\sqrt{2}r-1)^2 = -6r^2 + 8\sqrt{2}r - 4 = -2(2r-\sqrt{2})(3r-\sqrt{2})$$

である。 $0 < r < \frac{\sqrt{2}}{2}$ と合わせると

- $0 < r < \frac{\sqrt{2}}{3}$ のとき、 $(x(1), y(1))$ 以外に C_2 と $C(r)$ の交点は存在しない。
- $r = \frac{\sqrt{2}}{3}$ のとき。

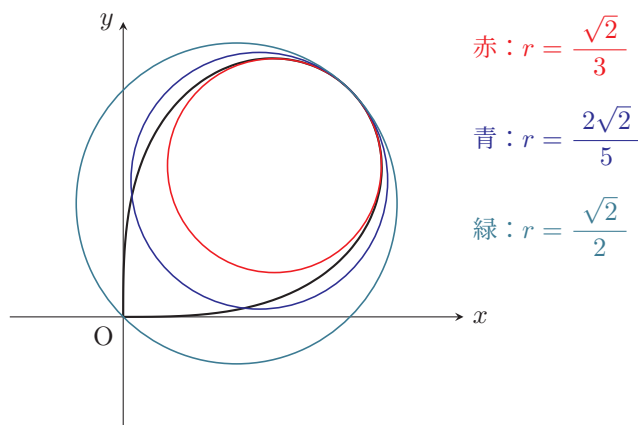
二次方程式 $(\sqrt{2}r-1)t^2 + \sqrt{2}rt + (\sqrt{2}r-1) = 0$ に r を代入すると $-\frac{1}{3}t^2 + \frac{2}{3}t - \frac{1}{2} = 0$ である。これは重解 $t=1$ を持つ。よって $(x(1), y(1))$ 以外に C_2 と $C(r)$ の交点は存在しない。

- $r > \frac{\sqrt{2}}{3}$ のとき。

二次方程式 $(\sqrt{2}r-1)t^2 + \sqrt{2}rt + (\sqrt{2}r-1) = 0$ は異なる 2 実数解を持つ。左辺に $t=1$ を代入すると $3\sqrt{2}r-2$ となる。今 $r > \frac{\sqrt{2}}{3}$ であるため、 $3\sqrt{2}r-2 \neq 0$ であるため、 $t=1$ が解になることはない。よって、 C_2 と $C(r)$ の交点は 3 つ存在する。

以上より

$$N(r) = \begin{cases} 1 & \left(0 < r \leq \frac{\sqrt{2}}{3} \text{ のとき} \right) \\ 3 & \left(\frac{\sqrt{2}}{3} < r < \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ のとき} \right) \end{cases}$$



注釈

C_2 のパラメータ t を削除すると $(x^2 + y^2)^2 = 4xy$ となる。これはレムニスケート関数を 45° 回転させたものである。

[IV]

以下の各問いに答えよ。

a を正の定数とする。区間 $0 \leq x < a$ で定義された関数 $f(x)$ は微分可能であり、以下の 3 条件を満たすとする。

- (i) 実数 t は $0 \leq t < a$ を満たすとする。O を原点とする xy 平面上の曲線 $C: y = f(x)$ の区間 $0 \leq x \leq t$ における長さが $a \log \left(\frac{a+t}{a-t} \right) - t$ に等しい。
- (ii) $f'(x) \leq 0$ (ただし, $0 \leq x < a$)
- (iii) $f\left(\frac{a}{2}\right) = 0$

問 1 関数 $f(x)$ を求め、 $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ。凹凸も調べよ。

問 2 a は $0 < a < 1$ を満たすとする。曲線 C と x 軸および y 軸によって囲まれた部分の面積を $S_1(a)$ とする。 C 上の点 $P\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ における接線を L とし、 L と y 軸との交点を Q とする。線分 PQ を $(2-a):(1+a)$ に内分する点を R とし、三角形 OPR の面積を $S_2(a)$ とするとき、 $S_1(a)$ と $S_2(a)$ の大小関係を調べよ。必要ならば、 $1.09 < \log 3 < 1.10$ であることを用いてよい。

解答

問 1 条件 (i) により

$$\begin{aligned} \int_0^t \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx &= a \log \left(\frac{a+t}{a-t} \right) - t \\ &= a \{ \log(a+t) - \log(a-t) \} - t \quad (\because 0 \leq t < a) \end{aligned}$$

両辺を t で微分すると

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \{f'(t)\}^2} &= a \left\{ \frac{1}{a+t} - \frac{-1}{a-t} \right\} - 1 \\ &= \frac{a^2 + t^2}{a^2 - t^2} \end{aligned}$$

両辺正より、2 乗しても同値性は崩れず

$$\begin{aligned} 1 + \{f'(t)\}^2 &= \left\{ \frac{a^2 + t^2}{a^2 - t^2} \right\}^2 \\ \iff \{f'(t)\}^2 &= \left\{ \frac{2at}{a^2 - t^2} \right\}^2 \\ \iff f'(t) &= \pm \frac{2at}{a^2 - t^2} \end{aligned}$$

条件 (i) の t の範囲と条件 (ii), および a が正の実数であることに注意して、 $f'(t) = \frac{2at}{t^2 - a^2}$ となるので

$$\begin{aligned} f(t) &= \int \frac{2at}{t^2 - a^2} dt \\ &= a \int \frac{(t^2 - a^2)'}{t^2 - a^2} dt \\ &= a \log |t^2 - a^2| + C \quad (C \text{ は積分定数}) \\ &= a \log(a^2 - t^2) + C \quad (\because 0 \leq t < a) \end{aligned}$$

条件 (iii) により $C = -a \log \frac{3}{4} a^2$ となるので

$$\begin{aligned} f(t) &= a \log(a^2 - t^2) - a \log \frac{3}{4} a^2 \\ &= a \log \frac{4(a^2 - t^2)}{3a^2} \end{aligned}$$

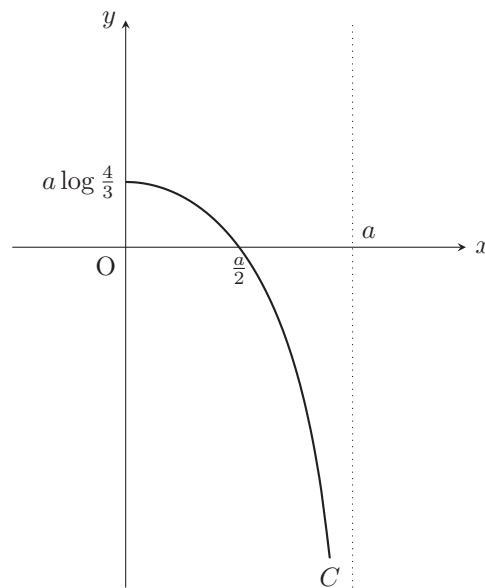
よって、 $f(x) = a \log \frac{4(a^2 - x^2)}{3a^2}$ である。

また、 $0 \leq x < a$ より

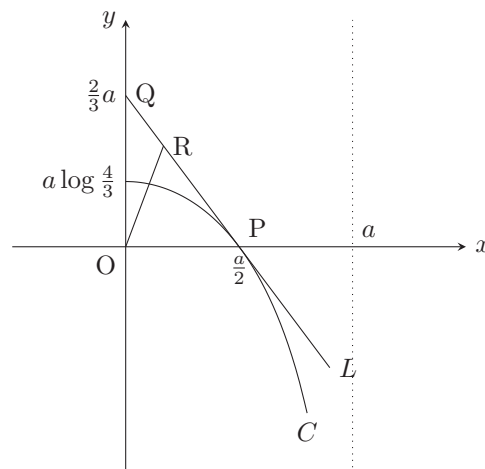
$$f'(x) = \frac{2ax}{x^2 - a^2} < 0, \quad f''(x) = \frac{-2a(x^2 + a^2)}{(x^2 - a^2)^2} < 0$$

となるので、 $f(x)$ は上に凸な単調減少な関数である。

$f(0) = a \log \frac{4}{3}$, $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = -\infty$ であるので、 $y = f(x)$ の概形は次のようになる。



問2 接線 L の方程式を求めると、 $y = -\frac{4}{3}x + \frac{2}{3}a$ である。



図より

$$\begin{aligned}
 S_1(a) &= \int_0^{\frac{a}{2}} f(x) dx \\
 &= a \int_0^{\frac{a}{2}} \left\{ \log(a+x) + \log(a-x) - \log \frac{4}{3} a^2 \right\} dx \\
 &= a \left[(a+x) \log(a+x) - x - \{(a-x) \log(a-x) + x\} \right]_0^{\frac{a}{2}} - \frac{a^2}{2} \log \frac{3}{4} a^2 \\
 &= a^2 (\log 3 - 1) \\
 S_2(a) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{3} a \times \frac{2-a}{(2-a) + (1+a)} \\
 &= \frac{a^2(2-a)}{18}
 \end{aligned}$$

これより

$$S_1(a) - S_2(a) = a^2 \cdot \frac{a - (20 - 18 \log 3)}{18}$$

ここで, $1.09 < \log 3 < 1.10 \iff 19.62 < 18 \log 3 < 19.8$ より, $0 < 20 - 18 \log 3 < 1$ である。
 よって, $0 < a < 1$ のとき, 求める大小関係は

$$\begin{cases} 0 < a < 20 - 18 \log 3 \text{ のとき} & S_1(a) < S_2(a) \\ a = 20 - 18 \log 3 \text{ のとき} & S_1(a) = S_2(a) \\ 20 - 18 \log 3 < a < 1 \text{ のとき} & S_2(a) < S_1(a) \end{cases}$$

講評

[I] [確率] (やや易)：反復試行に関する確率の出題であった。本学にしては非常に解きやすい確率である。ここは落としたい。

[II] [空間座標] (標準)：空間座標からの出題であった。計算量も控えめで解きやすかったのではないだろうか。[I]と合わせて完答を狙いたい。

[III] [関数, 媒介変数] (標準)：交点の軌跡と円の共有点に関する出題であった。問3では要領よく計算できたかがポイントであろう。

[IV] [数Ⅲ微積分] (標準)：微分方程式からの出題であった。文字の条件と計算に気をつけて問題を進めたい。内容自体は難しいものではないので、ミスなく進めたい。

昨年度に比べると易化した。全体的に計算量も控えめで昨年度同様、以前と比べて計算量が減ってきている。一次突破ボーダーは65%程度か。

26年度解答速報はメルマガ登録またはLINE友だち追加で全科目を閲覧

本解答速報の内容に関するお問合せは



医学部専門予備校

YMS

☎ 03-3370-0410 <https://yms.ne.jp/>
東京都渋谷区代々木 1-37-14

医学部進学予備校 **メビオ** ☎ 0120-146-156
<https://www.mebio.co.jp/>

医学部専門予備校 **英進館メビオ** 福岡校 ☎ 0120-192-215
<https://www.mebio-eishinkan.com/>

メルマガ登録



LINE 登録

