日本医科大学（後期）　数学

2026年 2月 28日実施

[I]

相異なる 3 定点 A, B, C は，ある円周上にこの順序で時計回りに並んでいる。動点 P は，初めに A にあり，1 から 4 の目が等確率で出る正四面体でできた 1 つのさいころを 1 回投げたとき，次の規則にしたがって 3 定点間を移動する。

[規則 1]　1 の目が出たら円周上を時計回りに今ある定点の隣の定点に移動する。

[規則 2]　2, 3 の目が出たら円周上を反時計回りに今ある定点の隣の定点に移動する。

[規則 3]　4 の目が出たら移動しない。

P が初めに A, B, C にある確率をそれぞれ a_0, b_0, c_0 $(a_0 = 1,\ b_0 = 0,\ c_0 = 0)$ とし，さいころを n $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 回投げた後に P が A, B, C にある確率をそれぞれ a_n, b_n, c_n とする。

問 1　a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1} を a_n, b_n, c_n で表すとき，以下の空欄に適する 1 以上の整数を求めよ。ただし，分数は既約分数で求めること。

$$a_{n+1} = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}a_n + \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}b_n + \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}c_n$$

$$b_{n+1} = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}a_n + \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}b_n + \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}c_n$$

$$c_{n+1} = \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}a_n + \frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}b_n + \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}c_n$$

問 2　a_{n+3} を b_n, c_n を用いずに a_n のみで表せ。答えのみでよい。

問 3　a_{3n} を n の式で表せ。答えのみでよい。

問 4　次の不等式を満たす最小の n を求めよ。答えのみでよい。

$$|a_{3n} - b_{3n+1}| < \left(\frac{1}{3}\right)^{99}$$

ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

解答

問 1 •　点 A に移動するのは，「点 A で留まる」「点 B から反時計回りに動く」「点 C から時計回りに動く」のいずれかであるため

$$\boldsymbol{a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n} \quad \cdots\cdots ①$$

- 点 B に移動するのは,「点 A から時計回りに動く」「点 B で留まる」「点 C から反時計回りに動く」のいずれかであるため

$$\boldsymbol{b_{n+1}=\frac{1}{4}a_n+\frac{1}{4}b_n+\frac{1}{2}c_n}$$

- 点 C に移動するのは,「点 A から反時計回りに動く」「点 B から時計回りに動く」「点 C で留まる」のいずれかであるため

$$\boldsymbol{c_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{4}b_n+\frac{1}{4}c_n}$$

問 2　$a_n+b_n+c_n=1$ より，$b_n+c_n=1-a_n$ を

$$① \iff a_{n+1}=\frac{1}{4}a_n+\frac{1}{4}b_n+\frac{1}{4}(b_n+c_n)$$

に代入することで

$$a_{n+1}=\frac{1}{4}b_n+\frac{1}{4}$$

を得る。b_{n+1}，c_{n+1} についても同様に計算すると，$b_{n+1}=\frac{1}{4}c_n+\frac{1}{4}$，　$c_{n+1}=\frac{1}{4}a_n+\frac{1}{4}$ を得る。これらを用いると

$$a_{n+2}=\frac{1}{4}b_{n+1}+\frac{1}{4}=\frac{1}{16}c_n+\frac{5}{16}$$

$$\therefore\ a_{n+3}=\frac{1}{16}c_{n+1}+\frac{5}{16}=\frac{1}{64}a_n+\frac{21}{64}$$

ゆえに

$$\boldsymbol{a_{n+3}=\frac{1}{64}a_n+\frac{21}{64}}$$

問 3　$p_n=a_{3n}$ とおくと，問 2 の結果より $p_{n+1}=\frac{1}{64}p_n+\frac{21}{64}$ である。よって，

$$p_{n+1}-\frac{1}{3}=\frac{1}{64}\left(p_n-\frac{1}{3}\right)$$

$p_0=a_0=1$ より，数列 $\left\{p_n-\frac{1}{3}\right\}$ は初項 $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$，公比 $\frac{1}{64}$ の等比数列であるため

$$a_{3n}-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{64}\right)^n$$

したがって

$$\boldsymbol{a_{3n}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{64}\right)^n}$$

問 4　$b_{n+1}=\frac{1}{4}c_n+\frac{1}{4}$ が成り立つので

$$b_{3n+1}=\frac{1}{4}c_{3n}+\frac{1}{4}\quad\cdots\cdots②$$

ここで，c_n についても a_n と同様の漸化式が成り立つため,

$$c_{n+3}=\frac{1}{64}c_n+\frac{21}{64}$$

$$\therefore\ c_{3n}-\frac{1}{3}=\left(0-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{64}\right)^n\quad(\because\ c_0=0)$$

$$\therefore\ c_{3n}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{64}\right)^n$$

これを②に代入すると，

$$b_{3n+1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{12}\left(\frac{1}{64}\right)^n$$

よって

$$|a_{3n} - b_{3n+1}| = \left|\left\{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{64}\right)^n\right\} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{12}\left(\frac{1}{64}\right)^n\right\}\right| = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{64}\right)^n$$

ゆえに，

$$\frac{3}{4}\left(\frac{1}{64}\right)^n < \left(\frac{1}{3}\right)^{99}$$

$$\frac{3}{2^2 \cdot 2^{6n}} < \left(\frac{1}{3}\right)^{99}$$

$$3^{100} < 2^{6n+2}$$

両辺正であることに注意して，常用対数をとると，

$$100\log_{10} 3 < (6n+2)\log_{10} 2$$

$$47.71 < (6n+2) \times 0.3010$$

$$6n + 2 > \frac{47.71}{0.3010} \fallingdotseq 158.504$$

$$6n > 156.504$$

$$n > 26.084\cdots$$

これを満たす最小の自然数は

$$n = \mathbf{27}$$

[Ⅱ]

i を虚数単位とする。複素数平面上において，原点 O を中心とし，半径が $\sqrt{2}$ の円を C_1 とする。C_1 上の点 $\mathrm{P}(z)$ に対して，点 $\mathrm{Q}(w)$ を次で定める。

$$w=\frac{(-1+3i)\,z+2i}{2z+2}$$

点 $\mathrm{P}(z)$ が C_1 上を動くとき，点 $\mathrm{Q}(w)$ が動く図形を C_2 とする。

問 1　C_2 を図示せよ。

問 2　w^2 が実数となる C_1 上の点 $\mathrm{P}(z)$ をすべて求めよ。

問 3　w^2 が純虚数となる C_1 上の点 $\mathrm{P}(z)$ をすべて求めよ。

解答

問 1　$\mathrm{P}(z)$ は

$$|z|=\sqrt{2}\ \cdots\cdots①$$

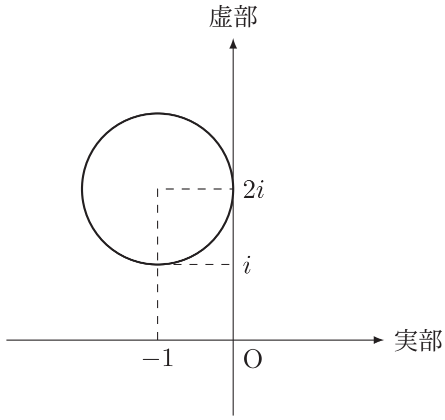
を満たす。また，$w=\dfrac{(-1+3i)\,z+2i}{2z+2}$ より

$$z=\frac{-2(w-i)}{2w+1-3i}\ \cdots\cdots②$$

であるから，①に代入して

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{-2(w-i)}{2w+1-3i}\right|=\sqrt{2}\\
&2\,|w-i|=\sqrt{2}\,|2w+1-3i|\\
&\sqrt{2}\,|w-i|=|2w+1-3i|\ \cdots\cdots①\\
&2(w-i)(\overline{w}+i)=(2w+1-3i)(\overline{w}+1+3i)\\
&w\overline{w}+(1+2i)w+(1-2i)\overline{w}+4=0\\
&(w+1-2i)(\overline{w}+1+2i)=1\\
&|w+1-2i|^2=1\\
\therefore\quad&|w-(-1+2i)|=1
\end{aligned}$$

これを図示して，次の図のようになる。



$\boxed{\text{注釈}}$ ①より

$$|w-i| : |2w+1-3i| = 1 : \sqrt{2}$$

であるから，アポロニウスの円であることを利用してもよい。

問 2

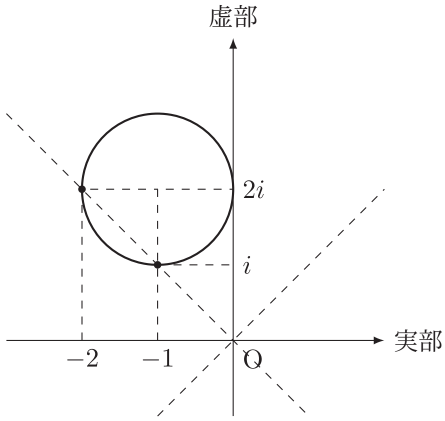
$$\begin{aligned} w^2\text{が実数} &\iff \overline{w^2} = w^2 \\ &\iff \overline{w}^2 - w^2 = 0 \\ &\iff \left(\overline{w} - w\right)\left(\overline{w} + w\right) = 0 \\ &\iff \overline{w} = w \text{ または } \overline{w} = -w \\ &\iff w \text{ は実数または純虚数} \end{aligned}$$

問 1 の結果において，w が実数または純虚数 となるのは $w = 2i$ のときのみであるから，
これを満たす z を求めればよい。
②に $w = 2i$ を代入して，求める z は

$$z = \boldsymbol{-1 - i}$$

問 3

$$\begin{aligned} w^2\text{が純虚数} &\iff \overline{w^2} = -w^2 \text{ かつ } w^2 \fallingdotseq\!\!\!\!/\ 0 \\ &\iff \overline{w}^2 + w^2 = 0 \text{ かつ } w \neq 0 \\ &\iff \left(\overline{w} - iw\right)\left(\overline{w} + iw\right) = 0 \text{ かつ } w \neq 0 \\ &\iff \text{「}\overline{w} = iw \text{ または } \overline{w} = -iw\text{」かつ } w \neq 0 \\ &\iff \arg(\overline{w}) = \arg(w) \pm \frac{\pi}{2} \\ &\iff \arg(w) = \pm\frac{\pi}{4} \text{ または } \pm\frac{3}{4}\pi \quad \cdots\cdots ③ \end{aligned}$$



問 1 の結果において，w が③を満たすのは $w=-1+i,\ -2+2i$ のときのみであるから，
これを満たす z を求めればよい。
②に $w=-1+i,\ -2+2i$ を代入して，求める z は

$$z=\boldsymbol{-1+i,\ \frac{-7+i}{5}}$$

注釈　$w=x+yi$ とおいて，w^2 が実数，純虚数となる条件を求めてもよい。

[III]

n を 0 以上の整数とし， x を実数とする。数列 $\{C_n(x)\}$ を以下のように定める。

$$C_0(x)=\cos x,\quad C_n(x)=C_{n-1}(x)\cdot\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

問 1　0 以上の整数 n に対して次が成り立つことを示せ。

$$C_n(x)=\frac{\sin 2x}{2^{n+1}\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}\quad \left(\text{ただし，整数 } l \text{ に対して，} x\fallingdotseq 2^n l\pi\right)$$

問 2　極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\left(\frac{\pi}{2^{k+3}}\right)\right\}$ を求めよ。

問 3　極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4^k}\tan^2\left(\frac{\pi}{2^{k+3}}\right)\right\}$ を求めよ。

解答

問 1　数学的帰納法で証明する。

$n=0$ のとき，倍角の公式を用いることで

$$C_0(x)=\cos x=\frac{\sin x\cos x}{\sin x}=\frac{\sin 2x}{2\sin x}$$

である。

$n=k$ で命題が成立すると仮定する。このとき，$C_k(x)=\dfrac{\sin 2x}{2^{k+1}\sin\left(\frac{x}{2^k}\right)}$ である。倍角の公式を同様に用いることで

$$\begin{aligned}
C_{k+1}(x)&=C_k(x)\cdot\cos\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\\
&=\frac{\sin 2x}{2^{k+1}\sin\left(\frac{x}{2^k}\right)}\cdot\cos\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\\
&=\frac{\sin 2x}{2^{k+1}\sin\left(\frac{x}{2^k}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\cos\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)}\\
&=\frac{\sin 2x}{2^{k+1}\sin\left(\frac{x}{2^k}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{x}{2^k}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)}\\
&=\frac{\sin 2x}{2^{k+2}\sin\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)}
\end{aligned}$$

である。こうして $n=k+1$ のときも命題は従う。数学的帰納法により，すべての 0 以上の整数 n に対して $C_n(x)=\dfrac{\sin 2x}{2^{n+1}\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}$ が成立する。

注釈

本質的には変わらないが，与えられた漸化式を繰り返し用いてもよい。

$$\begin{aligned}
C_n(x) &= C_{n-1}(x)\cdot\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)\\
&= C_{n-2}(x)\cdot\cos\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)\\
&= \cdots\cdots\\
&= C_0(x)\cdot\cos\left(\frac{x}{2^1}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{2^2}\right)\cdots\cdots\cos\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)\\
&= \cos x\cdot\cos\left(\frac{x}{2^1}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{2^2}\right)\cdots\cdots\cos\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)\\
&= \frac{\cos x\cdot\cos\left(\frac{x}{2^1}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{2^2}\right)\cdots\cdots\cos\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}\\
&= \frac{\cos x\cdot\cos\left(\frac{x}{2^1}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{2^2}\right)\cdots\cdots\cos\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)\sin\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}\\
&= \frac{\cos x\cdot\cos\left(\frac{x}{2^1}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{2^2}\right)\cdots\cdots\sin\left(\frac{x}{2^{n-2}}\right)}{2^2\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}\\
&= \cdots\cdots\\
&= \frac{\cos x\cdot\sin x}{2^n\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}\\
&= \frac{\sin 2x}{2^{n+1}\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}
\end{aligned}$$

問 2　$\dfrac{d}{dx}\log|\cos x| = \dfrac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$ である。よって，

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\left(\frac{x}{2^k}\right) &= \sum_{k=0}^{n}\frac{d}{dx}\left(-\log\left|\cos\frac{x}{2^k}\right|\right)\\
&= \frac{d}{dx}\left\{-\log\left(|\cos x|\cdot\left|\cos\frac{x}{2}\right|\cdots\cdots\left|\cos\frac{x}{2^k}\right|\right)\right\}\\
&= -\frac{d}{dx}\log|C_n(x)|
\end{aligned}$$

である。問 1 より

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\log C_n(x) &= \frac{d}{dx}\left\{\log|\sin 2x| - \log 2^{n+1} - \log\left|\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)\right|\right\}\\
&= \frac{2\cos 2x}{\sin 2x} - \frac{\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)}{2^n\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}\\
&= \frac{2}{\tan 2x} - \frac{1}{2^n\tan\left(\frac{x}{2^n}\right)}
\end{aligned}$$

である。

$x=\dfrac{\pi}{8}$ を代入することで

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\left(\frac{\pi}{2^{k+3}}\right)=-\frac{2}{\tan\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{2^n\tan\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right)}=-2+\frac{1}{2^n\tan\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right)}$$

を得る。

ここで $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2^n}=0$ であるため,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n\tan\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{8}\cdot\frac{\frac{\pi}{2^{n+3}}}{\tan\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right)}=\frac{8}{\pi}$$

である。ゆえに

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\left(\frac{\pi}{2^{k+3}}\right)=-2+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n\tan\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right)}=\boldsymbol{\frac{8}{\pi}-2}$$

である。

$\boxed{\text{注釈}}$

$0<\phi<\dfrac{\pi}{4}$ を満たす ϕ に対して

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tan\phi}-\frac{2}{\tan 2\phi}&=\frac{1}{\tan\phi}-\frac{2(1-\tan^2\phi)}{2\tan\phi}\\&=\frac{\tan^2\phi}{\tan\phi}\\&=\tan\phi\end{aligned}$$

であるので

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\left(\frac{\pi}{2^{k+3}}\right)&=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\left(\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2^{k+3}}\right)}-\frac{2}{\tan\left(\frac{\pi}{2^{k+2}}\right)}\right)\\&=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2^k\tan\left(\frac{\pi}{2^{k+3}}\right)}-\frac{1}{2^{k-1}\tan\left(\frac{\pi}{2^{k+2}}\right)}\right)\\&=\frac{1}{2^n\tan\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right)}-\frac{1}{2^{-1}\tan\left(\frac{\pi}{2^2}\right)}\\&=\frac{\frac{\pi}{2^{n+3}}}{\tan\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right)}\cdot\frac{2^3}{\pi}-\frac{2}{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}\end{aligned}$$

と変形できる。したがって

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\left(\frac{\pi}{2^{k+3}}\right)\right\}&=1\cdot\frac{2^3}{\pi}-\frac{2}{1}\\&=\boldsymbol{\frac{8}{\pi}-2}\end{aligned}$$

とすることもできるが，誘導なしでは厳しいだろう。

問 3　次の計算

$$\frac{d}{dx}(\tan x-x)=\frac{1}{\cos^2 x}-1=\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=\tan^2 x$$

より,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4^k}\tan^2\left(\frac{x}{2^k}\right)&=\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{n}\left\{\frac{1}{2^k}\tan\left(\frac{x}{2^k}\right)-\frac{x}{4^k}\right\}\\&=\frac{d^2}{dx^2}\sum_{k=0}^{n}\left\{-\log\left|\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)\right|-\frac{x^2}{2\cdot4^k}\right\}\\&=\frac{d^2}{dx^2}\left\{-\log|C_n(x)|-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^2}{2\cdot4^k}\right\}\\&=-\frac{d^2}{dx^2}\log|C_n(x)|-\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}}\\&=-\frac{d^2}{dx^2}\log|C_n(x)|-\frac{4}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right\}\end{aligned}$$

である。問 2 の結果とあわせて

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4^k}\tan^2\left(\frac{x}{2^k}\right)\\&=-\frac{d}{dx}\left\{\frac{2}{\tan 2x}-\frac{1}{2^n\tan\left(\frac{x}{2^n}\right)}\right\}-\frac{4}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right\}\\&=\frac{2}{\tan^2 2x}\cdot2\cdot\frac{1}{\cos^2 2x}-\frac{1}{2^n\tan^2\left(\frac{x}{2^n}\right)}\cdot\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2^n}\right)}-\frac{4}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right\}\\&=\frac{4}{\sin^2 2x}-\frac{1}{4^n\sin^2\left(\frac{x}{2^n}\right)}-\frac{4}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right\}\end{aligned}$$

を得る。

これに $x=\dfrac{\pi}{8}$ を代入することで

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4^k}\tan^2\left(\frac{\pi}{2^{k+3}}\right)&=\frac{4}{\sin^2\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{4^n\sin^2\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right)}-\frac{4}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right\}\\&=8-\frac{1}{4^n\sin^2\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right)}-\frac{4}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right\}\end{aligned}$$

を得る。

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2^{n+3}}=0$ より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4^n\sin^2\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right)}=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{8}{\pi}\cdot\frac{\frac{\pi}{2^{n+3}}}{\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right)}\right\}^2=\frac{64}{\pi^2}$$

である。また,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right\}=\frac{4}{3}$$

である。よって

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4^k}\tan^2\left(\frac{\pi}{2^{k+3}}\right)\right\}=8-\frac{64}{\pi^2}-\frac{4}{3}=\boldsymbol{\frac{20}{3}-\frac{64}{\pi^2}}$$

である。

$\boxed{\text{注釈}}$

問 2 の別解同様に考えることもできる。

$0<\phi<\dfrac{\pi}{4}$ を満たす ϕ に対して

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tan\phi}-\frac{2}{\tan 2\phi}&=\frac{1}{\tan\phi}-\frac{2(1-\tan^2\phi)}{2\tan\phi}\\&=\frac{\tan^2\phi}{\tan\phi}\\&=\tan\phi\end{aligned}$$

であるので，2 乗して

$$\begin{aligned}\tan^2\phi&=\left(\frac{1}{\tan\phi}-\frac{2}{\tan 2\phi}\right)^2\\&=\frac{1}{\tan^2\phi}-\frac{4}{\tan\phi\tan 2\phi}+\frac{4}{\tan^2 2\phi}\\&=\frac{4}{\tan^2 2\phi}-\frac{4}{\tan\phi\cdot\frac{2\tan\phi}{1-\tan^2\phi}}+\frac{1}{\tan^2\phi}\\&=\left(\frac{4}{\tan^2 2\phi}-\frac{1}{\tan^2\phi}\right)+2\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4^k}\tan^2\left(\frac{\pi}{2^{k+3}}\right)&=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4^k}\left\{\left(\frac{4}{\tan^2\left(\frac{\pi}{2^{k+2}}\right)}-\frac{1}{\tan^2\left(\frac{\pi}{2^{k+3}}\right)}\right)+2\right\}\\&=\sum_{k=0}^{n}\left\{\left(\frac{1}{4^{k-1}\tan^2\left(\frac{\pi}{2^{k+2}}\right)}-\frac{1}{4^k\tan^2\left(\frac{\pi}{2^{k+3}}\right)}\right)+2\left(\frac{1}{4}\right)^k\right\}\\&=\frac{1}{4^{-1}\tan^2\left(\frac{\pi}{2^2}\right)}-\frac{1}{4^n\tan^2\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right)}+2\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}}\\&=\frac{4}{\tan^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}-\left\{\frac{\frac{\pi}{2^{n+3}}}{\tan\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right)}\right\}^2\cdot\frac{2^6}{\pi^2}+\frac{8}{3}\cdot\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right\}\end{aligned}$$

と変形できる。したがって

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4^k}\tan^2\left(\frac{\pi}{2^{k+3}}\right)\right\}&=\frac{4}{1^2}-1^2\cdot\frac{2^6}{\pi^2}+\frac{8}{3}\cdot 1\\&=\boldsymbol{\frac{20}{3}-\frac{64}{\pi^2}}\end{aligned}$$

[IV]

O を原点とする座標平面において，曲線 C を次で定める。

$$C : y = f(x) = \sqrt{3}x + e^{-x} \quad (x \geqq 0)$$

n を 1 以上の整数とし，直線 $y = n$ と曲線 C の共有点を点 $\mathrm{P}_n\,(a_n,\ n)$ とする。点 P_n から直線 $L : y = \sqrt{3}x$ に垂線 $\mathrm{P}_n\mathrm{X}_n$ を下ろす。曲線 C，直線 L，線分 $\mathrm{P}_n\mathrm{X}_n$，線分 $\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{X}_{n+1}$ で囲まれた部分を直線 L の周りに 1 回転させてできる立体の体積を V_n とおく。

問 1　C 上の点 $\mathrm{P}\,(x,\ f(x))$ から直線 L に垂線 PX を下ろし，線分 PX と線分 OX の長さをそれぞれ $d(x)$，$s(x)$ とおく。$d(x)$，$s(x)$ をそれぞれ x で表せ。答えのみでよい。

問 2　極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(a_n - \frac{\sqrt{3}}{3}n\right)$ を求めよ。

問 3　次の等式が成り立つ関数 $F(x)$ を求め，x で表せ。

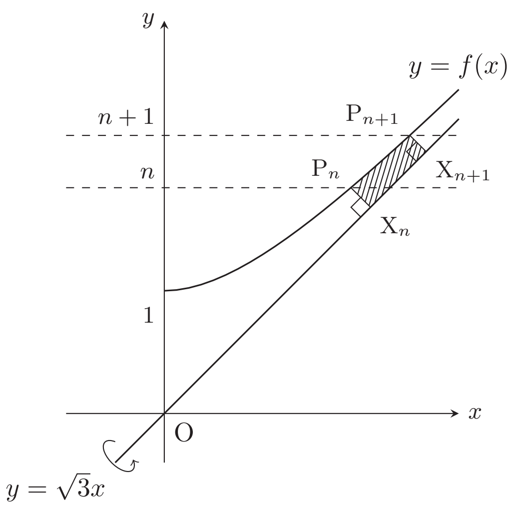
$$V_n = \Big[F(x)\Big]_{a_n}^{a_{n+1}}$$

ただし，実数 $\alpha,\ \beta$ に対して，$\Big[F(x)\Big]_{\alpha}^{\beta}$ は $F(\beta) - F(\alpha)$ を表す。

問 4　k を正の定数とする。次の極限が存在し，かつその極限値が正となる k の値を 1 つ求めよ。また，そのときの極限値も答えよ。

$$\lim_{n\to\infty} e^{kn} V_n$$

$\boxed{\text{解答}}$



問 1　点と直線の距離の公式を用いて

$$d(x) = \frac{|\sqrt{3}x - f(x)|}{2} = \frac{|-e^{-x}|}{2} = \boldsymbol{\frac{e^{-x}}{2}}$$

また，三角形 OPX で三平方の定理を用いて

$$\begin{aligned} s(x) &= \sqrt{\mathrm{OP}^2 - \mathrm{PX}^2} \\ &= \sqrt{\frac{3}{4}\left(e^{-2x} + \frac{8\sqrt{3}}{3}xe^{-x} + \frac{16}{3}x^2\right)} \\ &= \sqrt{\frac{3}{4}\left(e^{-x} + \frac{4\sqrt{3}}{3}x\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(e^{-x} + \frac{4\sqrt{3}}{3}x\right) \\ &= \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-x} + 2x} \end{aligned}$$

問 2　$y = \sqrt{3}x + e^{-x}$ と $y = n$ の共有点が $\mathrm{P}_n\,(a_n,\ n)$ であるので

$$n = \sqrt{3}a_n + e^{-a_n}$$

$$\Longleftrightarrow a_n - \frac{\sqrt{3}}{3}n = -\frac{e^{-a_n}}{\sqrt{3}}$$

$n \to \infty$ のとき，$a_n \to \infty$ であるので

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n - \frac{\sqrt{3}}{3}n\right) = \lim_{a_n\to\infty}\left(-\frac{e^{-a_n}}{\sqrt{3}}\right) = \mathbf{0}$$

$\boxed{\text{注釈}}$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ を自明としないならば，a_n が $\frac{n-1}{\sqrt{3}} < a_n < \frac{n}{\sqrt{3}}$ を満たし，$\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{\sqrt{3}} = \infty$ より，$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ とすればよい。

問 3　$\mathrm{OX} = t$ とすると，$t = s(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-x} + 2x \Rightarrow dt = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-x} + 2\right)dx$ であるので，$\mathrm{PX} = d(x) = \frac{e^{-x}}{2}$ とあわせて

$$\begin{aligned} \frac{V_n}{\pi} &= \int_{\mathrm{OX}_n}^{\mathrm{OX}_{n+1}} \mathrm{PX}^2 dt \\ &= \int_{a_n}^{a_{n+1}} \left(\frac{e^{-x}}{2}\right)^2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-x} + 2\right)dx \\ &= \int_{a_n}^{a_{n+1}} \left(-\frac{\sqrt{3}}{8}e^{-3x} + \frac{1}{2}e^{-2x}\right)dx \\ &= \left[\frac{\sqrt{3}}{24}e^{-3x} - \frac{1}{4}e^{-2x}\right]_{a_n}^{a_{n+1}} \end{aligned}$$

よって

$$F(x) = \boldsymbol{\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{24}e^{-3x} - \frac{1}{4}e^{-2x}\right)}$$

問 4　問 3 より

$$
\begin{aligned}
V_n &= \frac{\pi}{8}\left\{-2(e^{-2a_{n+1}} - e^{-2a_n}) + \frac{\sqrt{3}}{3}(e^{-3a_{n+1}} - e^{-3a_n})\right\} \\
&= \frac{\pi}{8}\left\{-2e^{-2a_n}(e^{2(a_n - a_{n+1})} - 1) + \frac{\sqrt{3}}{3}e^{-3a_n}(e^{3(a_n - a_{n+1})} - 1)\right\} \\
&= \frac{\pi}{8}e^{-2a_n}\left\{2(1 - e^{2(a_n - a_{n+1})}) + \frac{\sqrt{3}}{3}e^{-a_n}(e^{3(a_n - a_{n+1})} - 1)\right\}
\end{aligned}
$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = \frac{\sqrt{3}}{3}$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} e^{-a_n} = 0$ より

$$
\lim_{n\to\infty}\left\{2(1 - e^{2(a_n - a_{n+1})}) + \frac{\sqrt{3}}{3}e^{-a_n}(e^{3(a_n - a_{n+1})} - 1)\right\} = 2\left(1 - e^{-\frac{2\sqrt{3}}{3}}\right)
$$

また，$e^{kn} \cdot e^{-2a_n} = e^{kn - 2a_n}$，$n = \sqrt{3}a_n + e^{-a_n}$ より

$$
\begin{aligned}
kn - 2a_n &= kn - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}n - \frac{\sqrt{3}}{3}e^{-a_n}\right) \\
&= \left(k - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)n + \frac{2\sqrt{3}}{3}e^{-a_n}
\end{aligned}
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
&k > \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ のとき，} \lim_{n\to\infty}(kn - 2a_n) = \infty \quad \therefore \lim_{n\to\infty} e^{kn - 2a_n} = \infty \\
&k < \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ のとき，} \lim_{n\to\infty}(kn - 2a_n) = -\infty \quad \therefore \lim_{n\to\infty} e^{kn - 2a_n} = 0 \\
&k = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ のとき，} \lim_{n\to\infty}(kn - 2a_n) = 0 \quad \therefore \lim_{n\to\infty} e^{kn - 2a_n} = 1
\end{aligned}
$$

となるから，与式が正の値に収束する k の値は $k = \boldsymbol{\frac{2\sqrt{3}}{3}}$ であり，極限値は

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} e^{kn}V_n &= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}n}V_n \\
&= \frac{\pi}{8}\cdot 1 \cdot 2\left(1 - e^{-\frac{2\sqrt{3}}{3}}\right) \\
&= \boldsymbol{\frac{\pi}{4}\left(1 - e^{-\frac{2\sqrt{3}}{3}}\right)}
\end{aligned}
$$

注釈

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ について

$$
\begin{array}{rl}
n + 1 &= \sqrt{3}a_{n+1} + e^{-a_{n+1}} \\
-)\quad n &= \sqrt{3}a_n + e^{-a_n} \\
\hline
1 &= \sqrt{3}(a_{n+1} - a_n) + e^{-a_{n+1}} - e^{-a_n}
\end{array}
$$

であるので，

$$
a_{n+1} - a_n = \frac{1}{\sqrt{3}}\{1 - (e^{-a_{n+1}} - e^{-a_n})\} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{3}}
$$

とした。

講評

［I］［確率，数列］（標準）：確率漸化式からの出題であった。計算がやや面倒である。なるべく得点したい。

［II］［複素数平面］（やや易）：一次分数変換からの出題であった。内容，計算ともに最も解きやすい大問であった。

［III］［数列，極限］（難）：三角関数の無限級数に関する出題であった。問 1 は経験があればすぐにできるだろう。問 2，問 3 は捨て問ではないだろうか。

［IV］［数III積分法］（やや難）：斜め回転体に関する体積からの出題であった。問 3 までできれば十分であろう。

昨年度に比べて同程度の難易度であった。前半でいかに得点ができたかだろう。一次突破ボーダーは 55% 程度か。