解答速報

埼玉医科大学（後期）　数学

2026年 2月 28日実施

$\boxed{1}$

次の文章を読み，後の問い（問 1，2）の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

a を正の定数，b を実数の定数とする。x の 3 次関数 $y = f(x)$ のグラフを x 軸方向に a，y 軸方向に b だけ平行移動したら

$$y = g(x) = x^3 - 3ax^2 - 9a^2x + b$$

となった。$y = g(x)$ の極大値と極小値の差は 32 である。

問 1　$a = \boxed{\ 1\ }$ であり，

$$f(x) = x^3 + \boxed{\ 2\ }x^2 - \boxed{\ 3\ }\boxed{\ 4\ }x - \boxed{\ 5\ }\boxed{\ 6\ }$$

である。

問 2　$y = f(x)$ のグラフ上にある点 P の x 座標を p とする。点 P から直線 $l : y = 3x - 1$ に下ろした垂線と l との交点を点 Q とする。このとき，2 点 P，Q の距離を $h(p)$ とする。$p > 0$ の範囲で，$h(p)$ は $p = \sqrt{\boxed{\ 7\ }}$ のときに極大値

$$\boxed{\ 8\ }\sqrt{\boxed{\ 9\ }} + \sqrt{\boxed{\ 10\ }\boxed{\ 11\ }}$$

をとる。

解答

問 1　$g(x)$ を微分すると

$$g'(x) = 3x^2 - 6ax - 9a^2 = 3(x + a)(x - 3a)$$

であるため，$x = -a$，$3a$ で極値をとる。

$$|g(3a) - g(-a)| = |(-27a^3 + b) - (5a^3 + b)| = 32|a^3|$$

である。条件よりこれは 32 であるため，$|a^3| = 1$ を得る。a は正の定数であることより $a = \mathbf{1}$ である。

$g(x) = f(x - a) + b = f(x - 1) + b$ である。よって $f(x) = g(x + 1) - b$ であるため

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x + 1) - b \\ &= (x + 1)^3 - 3(x + 1)^2 - 9(x + 1) + b - b \\ &= x^3 + 3x^3 + 3x + 1 - 3(x^2 + 2x + 1) - 9(x + 1) \\ &= \boldsymbol{x^3 - 12x - 11} \end{aligned}$$

である。

問 2　$h(p)$ は，点 P と直線 l の距離である。点 P は $(p,\ p^3-12p-11)$ と表されるため，点と直線の距離の公式から

$$h(p)=\frac{|3p-(p^3-12p-11)-1|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{|p^3-15p-10|}{\sqrt{10}}$$

である。

$k(p)=p^3-15p-10\ (p>0)$ とおく。

$$k'(p)=3p^2-15=3(p+\sqrt{5})(p-\sqrt{5})$$

であるため，$k(p)$ の増減表は次のようになる。

p	0	$\cdots$	$\sqrt{5}$	$\cdots$
$k'(p)$	$-$	$-$	0	$+$
$k(p)$		$\searrow$		$\nearrow$

特に $k(0)=-10<0$，$k(4)=64-60-10=-6<0$ より，$k(\sqrt{5})<0$ である。
したがって，$p^3-15p-10=0$ の正の解を α とおくと $h(p)\ (p>0)$ の増減表は次のようになる。

p	0	$\cdots$	$\sqrt{5}$	$\cdots$	α	$\cdots$
$h(p)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

こうして $h(p)$ は $p=\boldsymbol{\sqrt{5}}$ のとき，

$$h(\sqrt{5})=\frac{|-5\sqrt{5}+15\sqrt{5}+10|}{\sqrt{10}}=\boldsymbol{5\sqrt{2}+\sqrt{10}}$$

をとる。

$\boxed{2}$

次の文章を読み，後の問い（問 1 〜 3）の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

x の関数 $f(x)$，$g(x)$ を

$$f(x)=\log(1+x)-\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)$$

$$g(x)=\log(1+x)-\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3\right)$$

とする。

問 1　$0 \leqq x \leqq 1$ とする。$f(x)$ の最小値を A，$g(x)$ の最大値を B とする。$A=\boxed{12}$ であり，$B=\boxed{13}$ である。

問 2　$f(0.2) \geqq A$，$g(0.2) \leqq B$ を用いると，$\log 1.2$ を小数で表したときの小数第 2 位の数字は $\boxed{14}$ であるとわかる。

問 3　$0 < x \leqq 1$ とし，x の関数 $h(x)$ を $h(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ とする。このとき，$\displaystyle\lim_{x\to+0}\log h(x)=\boxed{15}$ および

$$\lim_{x\to+0}\frac{h'(x)}{h(x)}=\frac{\boxed{16}\,\boxed{17}}{\boxed{18}}$$ が成り立つ。

解答

問 1

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}-(1-x)$$
$$=\frac{x^2}{1+x} \geqq 0 \quad (\because\ 0 \leqq x \leqq 1)$$

であるから，$f(x)$ は単調増加である。
よって，最小値 A は

$$A=f(0)=\mathbf{0}$$

である。

$$g'(x)=\frac{1}{1+x}-(1-x+x^2)$$
$$=\frac{-x^3}{1+x} \leqq 0 \quad (\because\ 0 \leqq x \leqq 1)$$

であるから，$g(x)$ は単調減少である。
よって，最大値 B は

$$B=g(0)=\mathbf{0}$$

である。

問 2　$f(0.2) \geqq 0$ より

$$f(0.2)=\log 1.2-\left(0.2-\frac{1}{2}\cdot 0.2^2\right)$$
$$=\log 1.2-0.18 \geqq 0$$

よって，

$$0.18 \leqq \log 1.2 \quad \cdots\cdots ①$$

同様に，$g(0.2) \leqq 0$ より

$$g(0.2) = \log 1.2 - \left(0.2 - \frac{1}{2}\cdot 0.2^2 + \frac{1}{3}\cdot 0.2^3\right)$$
$$= \log 1.2 - (0.18 + \frac{1}{3}\cdot 0.0008) \leqq 0$$

よって，

$$\log 1.2 \leqq 0.18 + \frac{1}{3}\cdot 0.0008 \quad \cdots\cdots ②$$

①，②より

$$0.18 \leqq \log 1.2 \leqq 0.18 + \frac{1}{3}\cdot 0.0008$$

がわかるので，$\log 1.2$ を小数で表した時の小数第 2 位の数字は **8** である。

問 3　まず，

$$\lim_{x\to+0} \log h(x) = \lim_{x\to+0} \log(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathbf{1}$$

である。次に

$$h(x) = \log(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

の両辺は正であるから，両辺の自然対数をとると

$$\log h(x) = \log(1+x)^{\frac{1}{x}} = \frac{\log(1+x)}{x}$$

この両辺を x で微分して

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = \frac{\frac{x}{1+x} - \log(1+x)}{x^2}$$
$$= \frac{x-(x+1)\log(x+1)}{x^2(x+1)}$$

である。ここで，問 1 より $0 \leqq x \leqq 1$ において，

$$\begin{cases} \log(1+x) - \left(x - \dfrac{1}{2}x^2\right) \geqq 0 \\ \log(1+x) - \left(x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x^3\right) \leqq 0 \end{cases}$$

が成り立つから，

$$x - \frac{1}{2}x^2 \leqq \log(1+x) \leqq x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$$

が成り立つ。したがって，$0 \leqq x \leqq 1$ において

$$\frac{x-(x+1)\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3\right)}{x^2(x+1)} \leqq \frac{h'(x)}{h(x)} \leqq \frac{x-(x+1)\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)}{x^2(x+1)}$$
$$\therefore \ \frac{x-1}{2(x+1)} - \frac{1}{3}x \leqq \frac{h'(x)}{h(x)} \leqq \frac{x-1}{2(x+1)}$$

が成り立ち，この左辺と右辺は $x \to +0$ とき $-\dfrac{1}{2}$ に近づくから，

はさみうちの原理により

$$\lim_{x\to+0} \frac{h'(x)}{h(x)} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

注釈

$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{h'(x)}{h(x)}=\lim_{x\to+0}\frac{x-(x+1)\log(x+1)}{x^2(x+1)}$ の極限は，$\dfrac{0}{0}$ の不定形であるので，ロピタルの定理を用いて

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+0}\frac{x-(x+1)\log(x+1)}{x^2(x+1)}&=\lim_{x\to+0}\frac{\{x-(x+1)\log(x+1)\}'}{\{x^2(x+1)\}'}\\&=\lim_{x\to+0}\frac{-\log(x+1)}{3x^2+2x}\\&=\lim_{x\to+0}\frac{\{-\log(x+1)\}'}{(3x^2+2x)'}\\&=\lim_{x\to+0}\frac{-1}{2(x+1)}\\&=\boldsymbol{\frac{-1}{2}}\end{aligned}$$

としてもよい。

$\boxed{3}$

次の文章を読み，後の問い（問 1〜3）の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

座標平面上で D を $x^2+y^2 \leqq 1$ かつ $-\dfrac{x}{\sqrt{3}} \leqq y \leqq \dfrac{x}{\sqrt{3}}$ を満たす領域とする。

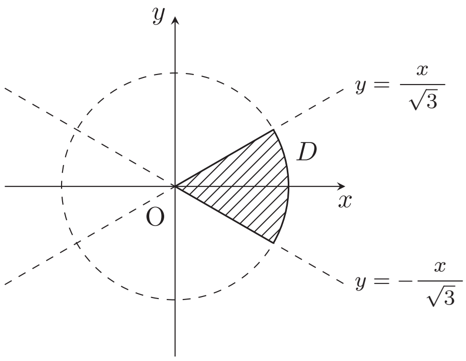
問 1　D の面積は $\dfrac{\boxed{19}}{\boxed{20}}\pi$ である。

問 2　D を y 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積は $\dfrac{\boxed{21}}{\boxed{22}}\pi$ である。

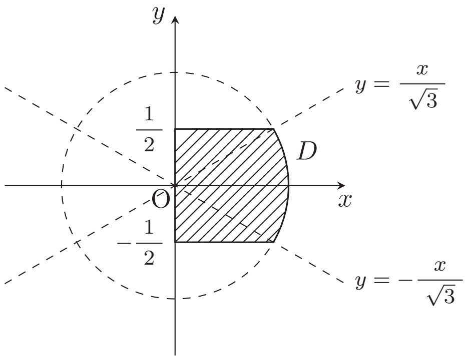
問 3　D を直線 $y=\sqrt{3}x$ のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積は $\dfrac{\sqrt{\boxed{23}}}{\boxed{24}}\pi$ である。

$\boxed{\text{解答}}$

問 1　$\tan\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ であるため，D は中心角が $\dfrac{\pi}{3}$，半径 1 の扇形になる。よって面積は $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{6}}$ である。



問 2　下図の斜線部を y 軸周りに 1 回転させてできる回転体から，半径 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，高さ $\dfrac{1}{2}$ の円錐を 2 個くり抜いた立体の体積を求めればよい。



よって求める値は，

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \pi x^2 dy - 2\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}\times\pi$$

$$=2\int_0^{\frac{1}{2}}\pi(1-y^2)dy-\frac{\pi}{4}$$

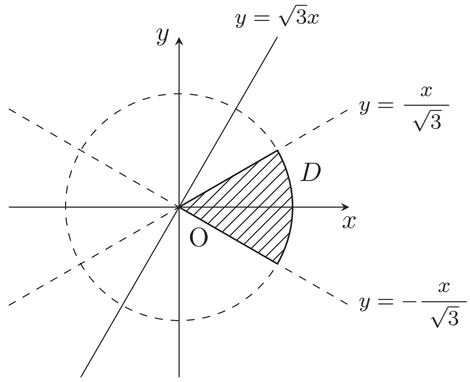
$$=2\Big[y-\frac{1}{3}y^3\Big]_0^{\frac{1}{2}}-\frac{\pi}{4}$$

$$=\frac{11}{12}\pi-\frac{\pi}{4}$$

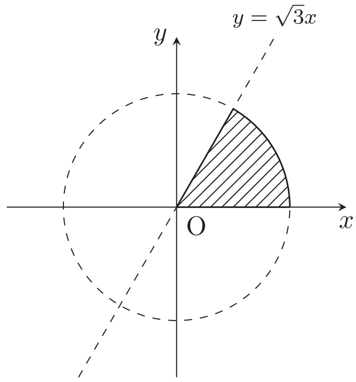
$$= \boldsymbol{\frac{2}{3}\pi}$$

である。

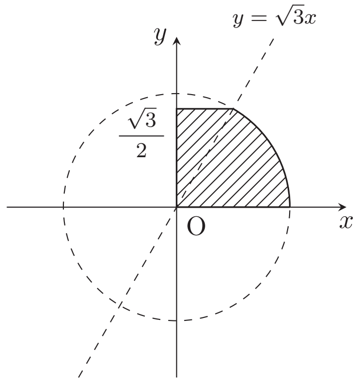
問 3　図は次のようになる。



$y=\sqrt{3}x$ は $y=-\dfrac{x}{\sqrt{3}}$ と直交し，y 軸となす角は $\dfrac{\pi}{6}$ である。ゆえに，図形全体を $\dfrac{\pi}{6}$ 回転させることで，求めるものは下図の斜線部を y 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積となる。



問 2 同様に下図の斜線部を y 軸周りに 1 回転させてできる回転体から，半径 $\dfrac{1}{2}$，高さ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ の円錐をくり抜いた立体の体積を求めればよい。



よって求める値は,

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \pi x^2 dy - \frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\pi$$

$$=\left[y-\frac{1}{3}y^3\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}-\frac{\sqrt{3}}{24}\pi$$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{8}\pi-\frac{\sqrt{3}}{24}\pi$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\pi$$

である。

$\boxed{4}$

次の文章を読み，後の問い (問 1 ～ 3) の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

赤玉 r 個，青玉 s 個，緑玉 t 個の合計 20 個の玉が入った袋がある。また，1 から 10 の自然数の書かれた番号札が 1 枚ずつ入った箱 A，同じく 5 から 14 の番号札が 1 枚ずつ入った箱 B，11 から 20 の番号札が 1 枚ずつ入った箱 C がある。

袋の中から玉を 1 個取り出して，赤玉だったら箱 A から番号札を 1 枚取り出す。青玉だったら箱 B から番号札を 1 枚取り出す。緑玉だったら箱 C から番号札を 1 枚取り出す。取り出された番号札に書かれた数を X とする。

問 1　$3 \leqq X \leqq 17$ となる確率は $\dfrac{\boxed{25}\,r+\boxed{26}\,\boxed{27}\,s+\boxed{28}\,t}{200}$ である。

問 2　X が 2 の倍数または 3 の倍数である確率は $\dfrac{\boxed{29}\,r+\boxed{30}\,s+\boxed{31}\,t}{200}$ である。

問 3　X の期待値は $\dfrac{\boxed{32}\,\boxed{33}\,r+\boxed{34}\,\boxed{35}\,s+\boxed{36}\,\boxed{37}\,t}{\boxed{38}\,\boxed{39}}$ である。

解答

問 1　条件より

$$\frac{r}{20}\cdot\frac{8}{10}+\frac{s}{20}\cdot\frac{10}{10}+\frac{t}{20}\cdot\frac{7}{10}$$
$$=\boldsymbol{\frac{8r+10s+7t}{200}}$$

問 2　条件より

(2 の倍数または 3 の倍数である確率)

=(2 の倍数である確率) + (3 の倍数である確率) − (2 の倍数かつ 3 の倍数である確率)

$$=\left(\frac{r}{20}\cdot\frac{5}{10}+\frac{s}{20}\cdot\frac{5}{10}+\frac{t}{20}\cdot\frac{5}{10}\right)$$
$$+\left(\frac{r}{20}\cdot\frac{3}{10}+\frac{s}{20}\cdot\frac{3}{10}+\frac{t}{20}\cdot\frac{3}{10}\right)$$
$$-\left(\frac{r}{20}\cdot\frac{1}{10}+\frac{s}{20}\cdot\frac{2}{10}+\frac{t}{20}\cdot\frac{2}{10}\right)$$
$$=\boldsymbol{\frac{7r+6s+6t}{200}}$$

問 3　期待値の定義にしたがって

$$\frac{r}{20}\cdot\frac{1}{10}(1+2+\cdots+10)$$
$$+\frac{s}{20}\cdot\frac{1}{10}(5+6+\cdots+14)$$
$$+\frac{t}{20}\cdot\frac{1}{10}(11+12+\cdots+20)$$
$$=\frac{r}{20}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{10(1+10)}{2}+\frac{s}{20}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{10(5+14)}{2}+\frac{t}{20}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{10(11+20)}{2}$$
$$=\boldsymbol{\frac{11r+19s+31t}{40}}$$

講評

$\boxed{1}$ ［数Ⅱ微分法］（やや易）：整関数の微分法からの出題であった。条件通りに計算していけばよい。b を決定する必要がないので，その点に注意したい。

$\boxed{2}$ ［数Ⅲ微分法，極限］（標準）：微分法を用いた不等式の評価に関する出題であった。問題の意図を理解し，問 3 の前半までは正解したい。問 3 の後半は誘導からはさみうちの原理か，あるいはロピタルの定理を用いて計算するとよいだろう。

$\boxed{3}$ ［数Ⅲ積分法］（標準）：円の領域に関する面積，体積からの出題であった。問 3 は回転軸をずらして計算する必要があるので，経験がないとすぐに思い付かないかもしれない。

$\boxed{4}$ ［確率］（やや易）：例年通り確率からの出題であった。文字の多さに驚くかもしれないが，問題文の意味を理解すれば淡々と計算を進めるだけであるので落ち着いてここは完答したい。

昨年度と比べて同程度の難易度であった。確率は例年通りの出題となったが，それ以外は微積分からの出題が目立った。一次突破ボーダーは 65% 程度か。