解答速報

昭和医科大学医学部（Ⅰ期）　数学

2026年 2月 6日実施

$\boxed{1}$

次の各問いに答えよ。ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

(1)　不等式 $1 \leqq 2^y \leqq x \leqq 2026$ を満たす整数の組 $(x,\ y)$ の総数を求めよ。

(2)　方程式 $(\sqrt{2})^{3x} + 2^x - (\sqrt{2})^{x+6} - 8 = 0$ を解け。

(3)　2026! を 10 進法で表すと末尾に 0 が何個連続して現れるか。

(4)　n は正の整数とする。$2n+1$ 個の値 $-n,\ -n+1,\ \cdots,\ 0,\ 1,\ \cdots,\ n$ からなるデータの分散の値が 30 であった。このときの n の値を求めよ。

(5)　20^{26} を 10 進法で表すとき，その桁数と最高位の数字を求めよ。ただし，必要に応じて下記対数表を用いよ。

$$\log_{10} 2 = 0.301 \quad \log_{10} 3 = 0.477 \quad \log_{10} 4 = 0.602 \quad \log_{10} 5 = 0.699$$
$$\log_{10} 6 = 0.778 \quad \log_{10} 7 = 0.845 \quad \log_{10} 8 = 0.903 \quad \log_{10} 9 = 0.954$$

$\boxed{\text{解答}}$

(1)　$1 \leqq 2^y \leqq 2026$ より，$0 \leqq y \leqq 10$ である。$y = n$ のとき，x としてありうる値は $2026 - 2^n + 1$ 通りなので，求める答えは

$$\sum_{n=0}^{10} (2026 - 2^n + 1) = \mathbf{20250}$$

個である。

(2)　$\left(\sqrt{2}\right)^x = a$ とおくと，与式は

$$\left\{\left(\sqrt{2}\right)^x\right\}^3 + \left\{\left(\sqrt{2}\right)^2\right\}^x + \left(\sqrt{2}\right)^x \times \left(\sqrt{2}\right)^6 - 8 = 0$$
$$a^3 + a^2 - 8a - 8 = 0 \qquad \text{(a)}$$

と表される。

(a) を解くと，$a = -1,\ -2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}$ である。「$\left(\sqrt{2}\right)^x = -1$ または $-2\sqrt{2}$ または $2\sqrt{2}$」を $\left(\sqrt{2}\right)^x > 0$ より，$x = \mathbf{3}$ となる。

(3)　末尾に連続する 0 の個数は，10 で何回割り切れるか，つまり 2 で割り切れる回数と 5 で割り切れる回数のうち小さい方となる。5 で割り切れる回数の方が少なそうである。2026 以下の正の整数のうち，5 で割り切れるもの

は $2026 \div 5$ の整数部分をとって 405 個，5^2 で割り切れるものは $2026 \div 5^2$ の整数部分をとって 81 個，5^3 で割り切れるものは $2026 \div 5^3$ の整数部分をとって 16 個，5^4 で割り切れるものは $2026 \div 5^4$ の整数部分をとって 3 個，5^5 で割り切れるものはないので，$2026!$ は 5 で $405 + 81 + 16 + 3 = 505$ 回割り切れる。また，2026 以下の正の整数のうち偶数は 1013 個あるので，$2026!$ は 2 で少なくとも 1013 回割り切れる。

以上のことから，求める答えは **505** 個である。

(4) データの平均値は 0 である (「絶対値が等しいもの同士で相殺する」と考えるとよい)。あとは分散の定義より

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=-n}^{n} k^2\right) \div (2n+1) &= 30 \\
\left(2 \times \sum_{k=1}^{n} k^2\right) \div (2n+1) &= 30 \\
\left\{2 \times \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)\right\} \div (2n+1) &= 30 \\
n(n+1) &= 90
\end{aligned}$$

が得られる。

n が正の整数であることより，$n = \mathbf{9}$ である。

(5)

$$\log_{10} 20^{26} = 26 \times (\log_{10} 20) = 26 \times (\log_{10} 2 + 1) = 33.826$$

なので，$33 < \log_{10} 20^{26} < 34$ なので 20^{26} は **34** 桁の整数である。また，

$$\log_{10}(6 \times 10^{33}) = \log_{10} 6 + 33 = 33.778$$

$$\log_{10}(7 \times 10^{33}) = \log_{10} 7 + 33 = 33.845$$

より，$\log_{10}(6 \times 10^{33}) < \log_{10} 20^{26} < \log_{10}(7 \times 10^{33})$ であるので $6 \times 10^{33} < 20^{26} < 7 \times 10^{33}$ である。

よって，20^{26} の最高位の数字は **6** である。

$\boxed{2}$

n は正の整数とする。次の定積分について $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx$ とおく。また，二重階乗を

$$n!!=\begin{cases} n(n-2)(n-4)(n-6)\cdots 6\times 4\times 2 & (n\text{ は偶数})\\ n(n-2)(n-4)(n-6)\cdots 5\times 3\times 1 & (n\text{ は奇数})\end{cases}$$

と定義する。次の各問いに答えよ。ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx$ を I_n の式で表せ。

(2) $n\geqq 3$ のとき，I_n を n と I_{n-2} を用いて表せ。

(3) $I_{2n+1}I_{2n}$ を n の式で表せ。

(4) $\lim_{n\to\infty} nI_{2n+1}I_{2n}$ を求めよ。

(5) $I_{2n+1}<I_{2n}<I_{2n-1}$，$(2n)!!=2^n\cdot n!$ であることを利用して $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\{(2n)!\}^2 n}{(2^n\cdot n!)^4}$ を求めよ。

$\boxed{\text{解答}}$

I_1 と I_2 を計算すると

$$\begin{aligned} I_1&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\ dx=1\\ I_2&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\ dx\\ &=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2x+1}{2}dx\\ &=\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

となる。

(1) $x=\dfrac{\pi}{2}-t$ と置換すると

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\ dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^0\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-t\right)(-dt)=\int_{\frac{\pi}{2}}^0\cos^n t(-dt)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n t\ dt=\boldsymbol{I_n}$$

(2) 部分積分をすると

$$\begin{aligned} I_n&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cos^{n-1}x\ dx\\ &=\Big[\sin x\cos^{n-1}x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos^{n-2}x\ dx\\ &=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 x)\cos^{n-2}x\ dx\\ &=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n\end{aligned}$$

であるため，$\boldsymbol{I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}}$ である。

(3)　(2) より

$$\begin{aligned} I_{2n+1} &= \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{3}I_1 \\ &= \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \\ I_{2n} &= \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{3}{4}I_2 \\ &= \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{4} \\ &= \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

であるため，

$$I_{2n+1}I_{2n} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2} = \boldsymbol{\frac{\pi}{2(2n+1)}}$$

である。

$\boxed{\text{注釈}}$

$I_{2n+1}I_{2n} = \dfrac{2n}{2n+1}I_{2n}I_{2n-1}$ より，$\{I_{2n+1}I_{2n}\}$ の一般項を考えてもよい。

(4)　(3) より

$$\lim_{n\to\infty} nI_{2n+1}I_{2n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2\left(2+\frac{1}{n}\right)} = \boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$$

である。

(5)　$(2n)!! = 2^n\cdot n!$ を用いると

$$\frac{\{(2n)!\}^2}{(2^n\cdot n!)^4} = \frac{\{(2n)!!\}^2\cdot\{(2n-1)!!\}^2}{\{(2n)!!\}^4} = \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 = \frac{4}{\pi^2}{I_{2n}}^2$$

と変形される。$0 < I_{2n+1} < I_{2n} < I_{2n-1}$ より

$$\frac{4}{\pi^2}nI_{2n+1}I_{2n} < \frac{\{(2n)!\}^2 n}{(2^n\cdot n!)^4} < \frac{4}{\pi^2}nI_{2n}I_{2n-1}$$

である。(4) より

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} nI_{2n+1}I_{2n} &= \frac{\pi}{4} \\ \lim_{n\to\infty} nI_{2n}I_{2n-1} &= \lim_{n\to\infty} nI_{2n}I_{2n+1}\cdot\frac{2n+1}{2n} \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

である。よって，はさみうちの原理から

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\{(2n)!\}^2 n}{(2^n\cdot n!)^4} = \frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{\pi}{4} = \boldsymbol{\frac{1}{\pi}}$$

である。

$\boxed{3}$

$a>0$ とする。xy 平面において，曲線 $y=\dfrac{a^2}{27}x^3$ を C_1 とし，曲線 $y=-\dfrac{1}{x}\ (x>0)$ を C_2 とする。C_1 と C_2 の両方に接する直線を ℓ とし，直線 ℓ と $C_1,\ C_2$ との接点をそれぞれ P, Q とする。次の各問いに答えよ。ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) 直線 ℓ の方程式，点 P, Q の座標をそれぞれ求めよ。

(2) 2 点 P, Q 間の距離 $\overline{\mathrm{PQ}}$ を求めよ。また，距離 $\overline{\mathrm{PQ}}$ の最小値 d とそのときの a の値を求めよ。

解答

(1) $\mathrm{P}\left(p,\ \dfrac{a^2}{27}p^3\right)\ (p>0)$，$\mathrm{Q}\left(q,\ -\dfrac{1}{q}\right)\ (q>0)$ とする。

$y=\dfrac{a^2}{27}x^3 \Rightarrow y'=\dfrac{a^2}{9}x^2$，$y=-\dfrac{1}{x} \Rightarrow y'=\dfrac{1}{x^2}$ であるので，曲線 C_1 上の点 P における接線，曲線 C_2 上の点 Q における接線の方程式は，それぞれ

$$y=\frac{a^2}{9}p^2(x-p)+\frac{a^2}{27}p^3,\ y=\frac{1}{q^2}(x-q)-\frac{1}{q}$$

すなわち

$$y=\frac{a^2}{9}p^2x-\frac{2a^2}{27}p^3,\ y=\frac{1}{q^2}x-\frac{2}{q}\quad\cdots\cdots①$$

これらが一致するとき，$\begin{cases}\dfrac{a^2}{9}p^2 &= \dfrac{1}{q^2}\\ -\dfrac{2a^2}{27}p^3 &= -\dfrac{2}{q}\end{cases}$ であるので，

$p>0,\ q>0,\ a>0$ に注意して $(p,\ q)=\left(\dfrac{3}{\sqrt{a}},\ \dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)$ である。

よって，①より直線 ℓ の方程式は $\boldsymbol{y=ax-2\sqrt{a}}$ であり，$\mathrm{P}\left(\boldsymbol{\dfrac{3}{\sqrt{a}},\ \sqrt{a}}\right)$，$\mathrm{Q}\left(\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{a}},\ -\sqrt{a}}\right)$ である。

(2) (1) より

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PQ}} &\geqq \sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{a}}\right)^2+(2\sqrt{a})^2}\\ &=\boldsymbol{2\sqrt{a+\frac{1}{a}}}\end{aligned}$$

$a>0,\ \dfrac{1}{a}>0$ であるので相加平均と相乗平均の関係により

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PQ}} &= 2\sqrt{2\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}}}\\ &=2\sqrt{2}\end{aligned}$$

等号は $a=\dfrac{1}{a}$，すなわち $a=1$ のとき成立する。

よって，求める最小値 d とそのときの a の値は $\boldsymbol{d=2\sqrt{2}\ (a=1)}$ である。

$\boxed{4}$

袋の中に赤玉が 1 個，白玉が 4 個入っている。A，B，C の 3 人がこの順で袋の中から玉を 1 つずつ取り出す。取り出した玉の色はすぐには確認せず，取り出した玉をもとに戻すこともしない。袋から玉を取り出すたびに，袋にはただちに白玉を 1 つ補充する。全員が取り出し終わってから玉の色を確認する。次の各問いに答えよ。ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

(1)　A が取り出した玉が赤玉である確率を求めよ。

(2)　B が取り出した玉が赤玉である確率を求めよ。

(3)　C が取り出した玉が赤玉である確率を求めよ。

(4)　全員が取り出した後，袋の中に赤玉が残っている確率を求めよ。

(5)　全員が取り出した後，各自の玉の色を確認する前に袋の中を確認したところ，袋の中に赤玉は残っていなかった。このとき B が赤玉を取り出していた確率を求めよ。

解答

玉を取り出した後，毎回白玉を補充するため，袋内には常に玉が 5 個入っている。
また，玉を取り出したとき，
取り出したのが赤玉の場合，その後，白玉 5 個が入った袋から玉を取り出すことになり，
取り出したのが白玉の場合，その後，赤玉 1 個と白玉 4 個が入った袋から玉を取り出すことになる
ことに注意する。

(1)　A が取り出した玉が赤玉となるのは，赤玉 1 個と白玉 4 個入った袋から赤玉を取り出す場合であるから，
その確率は

$$\boldsymbol{\frac{1}{5}}$$

(2)　B が取り出した玉が赤玉となるのは，A が白玉を取り出し $\left(\text{確率}\frac{4}{5}\right)$，その次に B が赤玉を取り出す $\left(\text{確率}\frac{1}{5}\right)$ 場合であるから，その確率は

$$\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}=\boldsymbol{\frac{4}{25}}$$

(3)　C が取り出した玉が赤玉となるのは，A と B が順に白玉を取り出し $\left(\text{確率}\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}\right)$，その次に C が赤玉を取り出す $\left(\text{確率}\frac{1}{5}\right)$ 場合であるから，その確率は

$$\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}=\boldsymbol{\frac{16}{125}}$$

(4)　全員が取り出した後，袋の中に赤玉が残っているのは，A，B，C が全員白玉を取り出した場合であるから，
その確率は

$$\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}=\boldsymbol{\frac{64}{125}}$$

(5)　事象 N，B を

$$\begin{cases} N：\text{全員が取り出した後，袋の中に赤玉がない} \\ B：\text{B が赤玉を取り出す} \end{cases}$$

とすると，求める確率は

$$P_N(B) = \frac{P(N \cap B)}{P(N)}$$

である。ここで，(1) から (3) より

$$\begin{aligned} P(N) &= P(3\text{ 人のいずれかが赤玉を取り出す}) \\ &= \frac{1}{5} + \frac{4}{25} + \frac{16}{125} \\ P(N \cap B) &= \frac{4}{25} \end{aligned}$$

であるから，

$$P_N(B) = \frac{P(N \cap B)}{P(N)} = \frac{\frac{4}{25}}{\frac{1}{5} + \frac{4}{25} + \frac{14}{125}} = \mathbf{\frac{20}{61}}$$

講評

$\boxed{1}$［小問集合（指数・対数・整数・データの分析）］（やや易）：基礎的な問題からなる小問集合であった。ここでは極力落としたくない。

$\boxed{2}$［数 III 積分］（標準）：ウォリスの積分に関する問題だった。経験がある受験生は比較的解きやすかったのではないか。最後の極限は見慣れない受験生も多いと思われるが，誘導にうまく乗りたい。

$\boxed{3}$［微分］（標準）：2 曲線の接線に関する出題であった。扱う文字が多くケアレスミスが発生しやすい。丁寧に計算したい。

$\boxed{4}$［確率］（易）：標準的な確率の問題であった。ここでは落とせない。

昨年度に比べると易化した。全体的に基礎的な問題が多く，落とせる問題が少ない。一次突破ボーダーは 80% 程度か。