医学部専門予備校 YMS
医学部進学予備校 メビオ　医学部専門予備校 英進館メビオ 福岡校

解答速報

東京医科大学　数学

2026年 2月 4日実施

第1問

(1)　$\sin^2 0° + \sin^2 1° + \sin^2 2° + \cdots + \sin^2 180°$ の値は $\boxed{アイ}$ である。

(2)　関数 $f(x) = 3\cos 2x + \sin^2 x - 2\cos x$ の

最大値は $\boxed{ウ}$，最小値は $-\dfrac{\boxed{エオ}}{\boxed{カ}}$ である。

(3)　n は正の整数とし，等差数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする。
$a_{140} = 1111$，$S_{100} - 2S_{101} + S_{102} = 5$ であるとき，
等差数列 $\{a_n\}$ の公差は $\boxed{キ}$ であり，$a_n = 2026$ とすれば $n = \boxed{クケコ}$ である。

(4)　放物線 $y = x^2$ と直線 $y = 1$ で囲まれた部分を，直線 $y = 2$ の周りに

一回転して得られる立体の体積は $\dfrac{\boxed{サシ}}{\boxed{スセ}}\pi$ である。

解答

(1)　$\sin(90° + \theta) = -\cos\theta$ より，$\sin^2(90° + \theta) = \cos^2\theta$ であることを利用すると，

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \sin^2 0° + \sin^2 1° + \cdots + \sin^2 89° + \sin^2(90° + 0°) + \sin^2(90° + 1°) + \cdots + \sin^2(90° + 89°) + \sin^2 180° \\ &= \sin^2 0° + \sin^2 1° + \cdots + \sin^2 89° + \cos^2 0° + \cos^2 1° + \cdots + \cos^2 89° + \sin^2 180° \\ &= (\sin^2 0° + \cos^2 0°) + (\sin^2 1° + \cos^2 1°) + \cdots + (\sin^2 89° + \cos^2 89°) + \sin^2 180° \\ &= \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1 + 1}_{90\text{ 個}} + 0 \\ &= \mathbf{90}\end{aligned}$$

(2)　2倍角の公式と $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ を利用すると

$$\begin{aligned}f(x) &= 3\cos 2x + \sin^2 x - 2\cos x \\ &= 3(2\cos^2 x - 1) + (1 - \cos^2 x) - 2\cos x \\ &= 5\cos^2 x - 2\cos x - 2 \\ &= 5\left(\cos x - \frac{1}{5}\right)^2 - \frac{11}{5}\end{aligned}$$

であり，$-1 \leqq \cos x \leqq 1$ であることに注意すると
$f(x)$ は $\cos x = -1$ のときに最大値 $\mathbf{5}$ をとり，

$\cos x = \dfrac{1}{5}$ のときに最小値 $\boldsymbol{-\dfrac{11}{5}}$ をとる。

(3)　$S_{100} - 2S_{101} + S_{102} = 5$ より

$$(S_{102} - S_{101}) - (S_{101} - S_{100}) = 5$$
$$a_{102} - a_{101} = 5$$

であるから，$\{a_n\}$ の公差は **5** である。

さらに，$a_{140} = 1111$ であることから，$a_n = 2026$ を満たす n は

$$n = 140 + \frac{2026 - 1111}{5} = \mathbf{323}$$

(4)　全体を y 軸方向に -2 だけ平行移動して考えると，

求める立体の体積 V は，曲線 $y = x^2 - 2$ と直線 $y = -1$ で囲まれた部分を，

x 軸の周りに一回転して得られる立体の体積に等しい。

y 軸に関する対称性より

$$\begin{aligned}
V &= 2\left\{\int_0^1 \pi(x^2-2)^2 dx - (\text{底円の半径 1 で高さが 1 の円柱の体積})\right\} \\
&= 2\left\{\pi\int_0^1 (x^4 - 4x^2 + 4)dx - \pi\right\} \\
&= 2\left\{\pi\left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3 + 4x\right]_0^1 - \pi\right\} \\
&= \boldsymbol{\frac{56}{15}\pi}
\end{aligned}$$

第2問

xy 平面上に，円 $C : x^2+(y-3)^2=9$ および，点 A$(1,0)$，B$(5,0)$ がある．点 P は円 C 上を動く．三角形 ABP の重心を G$(a,\ b)$ とし，点 P が円 C 上を動くときの G の軌跡を C' とする．

(1)　C' は，中心 ($\boxed{\text{ア}}$ ，$\boxed{\text{イ}}$)，半径 $\boxed{\text{ウ}}$ の円から，点 ($\boxed{\text{エ}}$ ，$\boxed{\text{オ}}$) を除いた図形である．

(2)　点 G が円 C' 上を動くとき，$\dfrac{3b}{a+2}$ のとる値の範囲は，$\boxed{\text{カ}} < \dfrac{3b}{a+2} \leqq \dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ である．

(3)　点 G が円 C' 上を動くとき，$\dfrac{(3b)^2+(a+2)^2}{3b(a+2)}$ は最小値 $\boxed{\text{ケ}}$ をとる．このとき，b の値は $\boxed{\text{コ}}$ または $\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ である．

解答

(1)　円 C 上の点を P$(s,\ t)$ とすると，その方程式は次のように表される。

$$s^2+(t-3)^2=9 \quad \cdots ①$$

三角形 ABP の重心 G$(a,\ b)$ は，A$(1,\ 0)$，B$(5,\ 0)$，P$(s,\ t)$ より，

$$a=\frac{s+6}{3}, \quad b=\frac{t}{3}$$

これらを $s,$，t について解くと，

$$s=3a-6, \quad t=3b$$

これを ① に代入すると，

$$(3a-6)^2+(3b-3)^2=9$$

$$9(a-2)^2+9(b-1)^2=9$$

$$(a-2)^2+(b-1)^2=1$$

また，点 A，B，P が三角形をなすためには，点 P は直線 AB（x 軸）上にあってはならない。 円 C と x 軸（$y=0$）の交点を求めると，$x=0$ となる。 ゆえに，点 P$(0,\ 0)$ のとき，重心 G は

$$\left(\frac{0+6}{3},\ \frac{0}{3}\right)=(2,0)$$

となる。 したがって，C' は中心 **(2，1)**，半径 **1** の円から，点 **(2，0)** を除いた図形である。

(2)　$k=\dfrac{3b}{a+2}$ とおくと，

$$k(a+2)=3b \iff ka-3b+2k=0$$

は ab 平面において，定点 $(-2,\ 0)$ を通る直線である。 点 G$(a,\ b)$ は円 $C' : (a-2)^2+(b-1)^2=1$ 上にあるため，この直線と円 C' が共有点を持つ条件を考える。 点 $(2,\ 1)$ と直線 $ka-3b+2k=0$ の距離が 1 以下になる条

件を求めると

$$\frac{|2k-3\cdot 1+2k|}{\sqrt{k^2+(-3)^2}} \leqq 1$$

$$\frac{|4k-3|}{\sqrt{k^2+9}} \leqq 1$$

$$|4k-3| \leqq \sqrt{k^2+9}$$

両辺を 2 乗して

$$16k^2-24k+9 \leqq k^2+9$$

$$3k(5k-8) \leqq 0$$

$$0 \leqq k \leqq \frac{8}{5}$$

ただし，$(a,\ b) \fallingdotseq (2,\ 0)$ であるから $k \fallingdotseq 0$ である。 したがって，求める範囲は

$$\boldsymbol{0 < \frac{3b}{a+2} \leqq \frac{8}{5}}$$

である。

(3)

$$\frac{(3b)^2+(a+2)^2}{3b(a+2)} = \frac{3b}{a+2} + \frac{a+2}{3b} = k + \frac{1}{k} \left(k = \frac{3b}{a+2} \text{とおいた。}\right)$$

とする。$f(k) = k + \dfrac{1}{k}$ とし，(2) より $0 < k \leqq \dfrac{8}{5}$ の範囲で考える。 相加相乗平均の関係より，

$$k + \frac{1}{k} \geqq 2$$

であり，等号成立は $k = \dfrac{1}{k}$ すなわち，$k=1$ のときである。 ここで，$k=1$ は範囲 $0 < k \leqq \dfrac{8}{5}$ に含まれるため，最小値は **2** である。 このとき，$k = \dfrac{3b}{a+2} = 1$ より

$$a+2=3b \iff a=3b-2$$

となる。 これを $(a-2)^2+(b-1)^2=1$ に代入すると，

$$(3b-4)^2+(b-1)^2=1$$

$$5b^2-13b+8=0$$

$$(5b-8)(b-1)=0$$

よって，$b=\boldsymbol{1}$ または $b=\boldsymbol{\dfrac{8}{5}}$ である。

第 **3** 問

xyz 空間において, 3 点 A $(7,\ 0,\ 0)$, B $\left(0,\ \dfrac{7}{2},\ 0\right)$, C $\left(0,\ 0,\ \dfrac{7}{3}\right)$ の定める平面 α および, 球面 $S : x^2+y^2+z^2=4$ がある。α と S の共通部分を C とする。C は円であり，その中心を P，半径を r とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ に直交するベクトルで，x 成分が 1 のものを $\vec{n}$ とすれば，$\vec{n}=(1,\ \boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イ}})$ である。

(2) 点 P の座標は $\left(\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}},\ \boxed{\text{オ}},\ \dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}\right)$ である。また，$r=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ク}}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である。

(3) 点 Q が C 上を動くとき，点 D$(1,1,1)$ と Q の距離の二乗の最小値は $\boxed{\text{コ}}-\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{サシ}}}}{\boxed{\text{ス}}}$ である。

解答

(1) $\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\y\\z\end{pmatrix}$ とおく．$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}-7\\\frac{7}{2}\\0\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix}-7\\0\\\frac{7}{3}\end{pmatrix}$ と直交するため，内積をとると

$$-7+\frac{7}{2}y=0,\quad -7+\frac{7}{3}z=0.$$

よって $y=2,\ z=3$ であるため，$\vec{n}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{2}\\\mathbf{3}\end{pmatrix}$ である．

(2) 点 P は平面 α 上にあるため，実数 $s,\ t$ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix}-7s-7t\\\frac{7}{2}s\\\frac{7}{3}t\end{pmatrix}$$

と表される．また直線 OP は法線ベクトル $\vec{n}$ と平行であるため，実数 u を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=u\vec{n}=\begin{pmatrix}u\\2u\\3u\end{pmatrix}$$

と表される．よって

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\begin{pmatrix}u-7\\2u\\3u\end{pmatrix}$$

各成分を比較すると

$$\begin{cases}-7s-7t=u-7\\\frac{7}{2}s=2u\\\frac{7}{3}t=3u\end{cases}$$

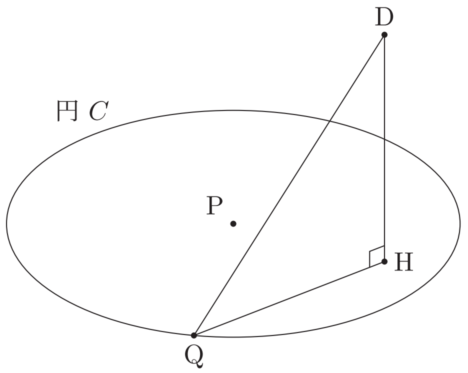
であるため，これを解いて $u=\dfrac{1}{2}$ を得る．ゆえに P$\left(\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\ \mathbf{1},\ \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\right)$ である．

三平方の定理より

$$r^2=4-\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2=4-\frac{7}{2}=\frac{1}{2}$$

より $r=\dfrac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}$ である．

(3) 点 D から平面 α に下した垂線の足を H とおく．



直線 DH は法線ベクトル $\overrightarrow{n}$ と平行であるため，実数 k により $\overrightarrow{\mathrm{DH}} = k\overrightarrow{n}$ と表される．つまり

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OD}} + \overrightarrow{\mathrm{DH}} = \begin{pmatrix} 1+k \\ 1+2k \\ 1+3k \end{pmatrix}$$

と表される．また点 H は平面 α 上に存在するため，直線 PH は法線ベクトル $\overrightarrow{n}$ と直交する．よって内積を考えることで

$$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PH}} = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+k \\ 2k \\ -\frac{1}{2}+3k \end{pmatrix} = 0 \iff \frac{1}{2} + k + 4k - \frac{3}{2} + 9k = 0$$

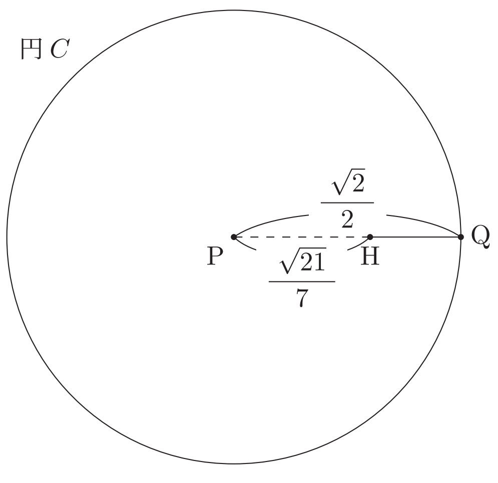
より $k = \dfrac{1}{14}$ であるため，$\mathrm{H}\left(\dfrac{15}{14},\ \dfrac{8}{7},\ \dfrac{17}{14}\right)$ を得る．

三平方の定理より

$$\mathrm{DQ}^2 = \mathrm{HQ}^2 + \mathrm{DH}^2 = \mathrm{HQ}^2 + \frac{1}{14}$$

であるため，HQ^2 の最小値を計算すればよい．

$\overrightarrow{\mathrm{PH}} = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} \\ \frac{1}{7} \\ -\frac{2}{7} \end{pmatrix}$ より $\mathrm{PH} = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$ であるため，下図より HQ の最小値は $\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{21}}{7}$ である．



よって，DQ^2 の最小値は

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{21}}{7}\right)^2 + \frac{1}{14} = \frac{1}{2} + \frac{3}{7} - \frac{\sqrt{42}}{7} + \frac{1}{14} = \mathbf{1 - \frac{\sqrt{42}}{7}}.$$

第 4 問

曲線 $C : y = \sin x \ (0 \leqq x \leqq \pi)$ および，直線 $l : y = \dfrac{2}{\pi}x$ があり，C と l で囲まれてできる図形を D とする。

(1)　C と l の共有点の x 座標は，　$x = \boxed{\text{ア}}$，$\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\pi$ である。

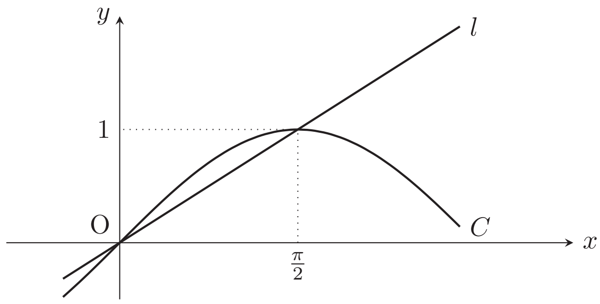
(2)　D の面積は，　$\boxed{\text{エ}} - \dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\pi$ である。

(3)　D を x 軸の周りに一回転して得られる立体の体積は $\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{クケ}}}\pi^{\boxed{\text{コ}}}$ である。

(4)　不等式 $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{\sin x}dx > (e-1)\pi$ を証明せよ。

(4) の解答は，数学解答用紙 B の解答枠内に記入せよ。途中過程や根拠も書き，数式も正しく書くこと。数や式や言葉は，文字が判読できるよう丁寧に記入せよ。

解答



(1)　図より，C と l の共有点の x 座標は $x = \mathbf{0},\ \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{\pi}$ である。

(2)　図より，求める面積を S とすると

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx - \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 1 \\
&= \mathbf{1} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\boldsymbol{\pi}
\end{aligned}
$$

(3)　図より，求める体積を V とすると

$$
\begin{aligned}
\frac{V}{\pi} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx - \frac{1}{3}\cdot 1^2 \cdot \frac{\pi}{2} \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2x}{2} x dx - \frac{\pi}{6} \\
&= \frac{1}{12}\pi
\end{aligned}
$$

よって

$$
V = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{12}}\boldsymbol{\pi}^{\mathbf{2}}
$$

(4)　左辺を対称性を利用して変形する。

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} e^{\sin x}dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{\sin x}dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} e^{\sin(\pi-t)}(-dt) \quad (\text{第 2 項を } x=\pi-t \text{ と置換した}) \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin t}dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}dx \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}dx \ \cdots\cdots①
\end{aligned}$$

したがって，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}dx > \frac{e-1}{2}\pi$$

を示す。

ここで，図より，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において $\sin x \geqq \dfrac{2}{\pi}x$ であるから，$e^{\sin x} \geqq e^{\frac{2}{\pi}x}$ $\cdots\cdots$② が成立する。

$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において積分すると，②の等号は常には成立しないので

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}dx &> \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{2}{\pi}x}dx \\
&= \left[\frac{\pi}{2}e^{\frac{2}{\pi}x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{e-1}{2}\pi
\end{aligned}$$

よって，①とあわせて題意は示された。

講評

第 **1** 問［小問集合］（標準）：(1) 三角比の値，(2) 三角関数の最大・最小，(3) 数列，(4) 回転体の体積からの出題であった。どれも平易な内容で極力落としたくない。

第 **2** 問［図形と方程式］（標準）：動点の軌跡と線形計画法に関する出題であった。(3) も (2) の形が見えるのでそれを利用して相加相乗平均に持ち込めば計算は早い。

第 **3** 問［空間座標］（標準）：空間座標における球面と平面に関する出題であった。同様の出題が日本医科大学で出題されたばかりである。(3) ができるかどうかで差がつくであろう。

第 **4** 問［数Ⅲ積分法］（標準〜やや難）：$y = \sin x$ と $y = \dfrac{2}{\pi}x$ の位置関係を問う典型的な出題であった。(3) までは落とせない。(4) の証明は本問の設定を上手に利用して解くことが求められる。

昨年度と同程度の内容であった。今年度から導入された記述問題は，定積分と不等式に関する証明であった。よほど慣れていないと難しいのではないか。一次突破ボーダーは 70% 程度か。