日本大学医学部 N方式（2期）二次試験　数学

2026年 3月 17日実施

[I]

三角形 ABC は $\angle A = 30^\circ$ を満たし，$AB = AC$ を満たす 2 等辺三角形である．また，三角形 ABC の面積は 1 であるとする．

以下の問いに答えなさい．

(1)　$\cos 15^\circ$ を求めなさい．

(2)　AB を求めなさい．

(3)　BC を求めなさい．

解答

(1)　加法定理により

$$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$$

(2)　三角形の面積公式より

$$\frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \angle A = 1 \qquad \cdots\cdots ①$$

である．いま，$AB = AC$，$\angle A = 30^\circ$ であるため，① は $\frac{1}{4}AB^2 = 1$ となる．よって $AB = \mathbf{2}$ である．

(3)　余弦定理より $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos 30^\circ = 8 - 4\sqrt{3}$ である．よって

$$BC = \sqrt{8 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{8 - 2\sqrt{12}} = \boldsymbol{\sqrt{6} - \sqrt{2}}$$

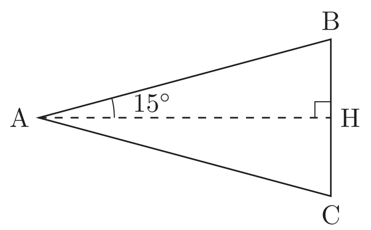
である．

別解

図より $\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AB \cdot \cos 15^\circ$ である．$\triangle ABC = 1$，$AB = 2$ を代入することで

$$BC = \frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \sqrt{6} - \sqrt{2}$$

である．



[Ⅱ]

座標平面上に放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ および円 C がある．いま，$a,\ b$ をともに正の数として，円 C は以下の（条件 1）と（条件 2）を満たしているとする．

（条件 1）　円 C は $(0,\ a)$ を中心とし，放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ と点 $\mathrm{A}\left(b,\ \dfrac{1}{2}b^2\right)$ を共有する

（条件 2）　円 C と放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ は，点 A において共通の接線をもつ

ここで，点 A において共通の接線をもつとは，円 C の点 A における接線と，放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ の点 A における接線が一致することを意味する．このとき，以下の問いに答えなさい．

(1)　（条件 1）と（条件 2）から，b^2 を a を用いて表しなさい．

(2)　さらに，円 C は円 $x^2+(y-1)^2=1$ に外接するとき，a と b の値を求めなさい．

解答

円 C の中心 $(0,\ a)$ を B とおく．放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ の点 A における接線を l とおく．

(1)　放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ $(\Rightarrow y'=x)$ の点 A における接線の傾きは b である．（条件 2）よりこれは円 C の点 A における接線の傾きでもある．

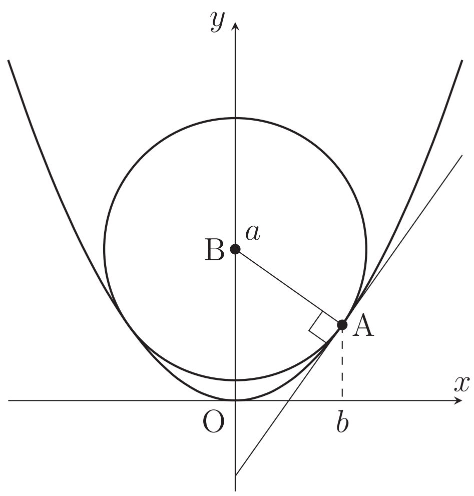
円の性質より l と直線 AB は直交する．直線 AB の傾きは

$$\frac{\frac{1}{2}b^2-a}{b-0}=\frac{b^2-2a}{2b}$$

である．直交する 2 直線の傾きの積は -1 であるため，

$$\frac{b^2-2a}{2b}\times b=-1$$

これを解いて，$b^2=\boldsymbol{2a-2}$ を得る．



(2)　円 C の半径を r とすると

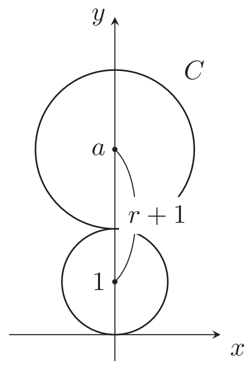
$$r=\sqrt{b^2+\left(\frac{1}{2}b^2-a\right)^2}=\sqrt{b^2+1}=\sqrt{2a-1}$$

である．

$b^2>0$ より $2a-2>0$ であるため，$a>1$ である．ゆえに円 C の中心は $(0,\ 1)$ よりも上（y 軸方向で正の方向）にある．よって図より

$$r+1=a-1$$

である．



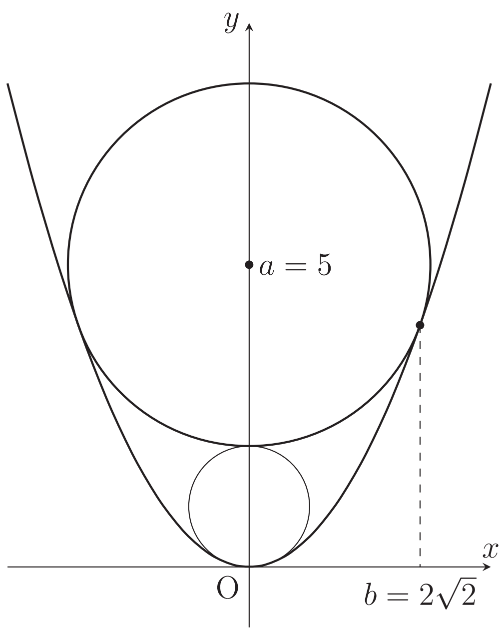
$r=\sqrt{2a+1}$ を代入して整理すると

$$\sqrt{2a+1}=a-2$$

である．辺々 2 乗して整理すると

$$a^2-6a+5=0$$

を得る．これを解くと $a=1,\ 5$ である．いま，$a>1$, かつ $a-2\geqq 0$ より，$a=\mathbf{5}$ である．(1) の解に代入して $b=2\sqrt{2}$ を得る．



[III]

α は $\dfrac{4}{3}<\alpha<2$ を満たす実数とする．曲線 $C: y=x^3-2x^2$ 上の $\mathrm{A}\left(\alpha,\ \alpha^3-2\alpha^2\right)$ を通り，曲線 C に点 A 以外の点で接する直線を l とする．以下の問いに答えなさい．

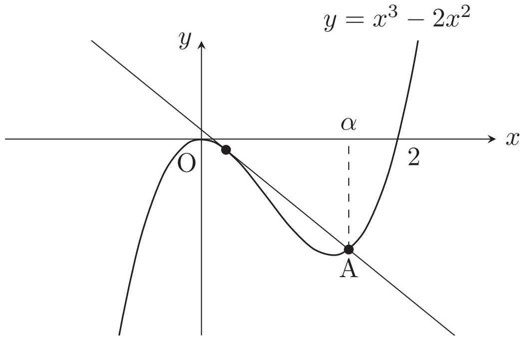
(1)　l を α を用いて表しなさい．

(2)　点 $\mathrm{B}(\alpha,\ 0)$ をとり，l と x 軸との交点を点 C とし，三角形 ABC を考えるとき，三角形 ABC の面積 S は，$S=\dfrac{T}{3\alpha+2}$ という形に書ける．T を α を用いて表しなさい．

(3)　(2) の S の最大値を与える α の値を求めなさい．

$\boxed{\text{解答}}$

$f(x)=x^3-2x^2$ とおく．$f'(x)=3x^2-4x$ である．



(1)　曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))\ (t\neq\alpha)$ における接線は $y=f'(t)(x-t)+f(t)$ つまり

$$\begin{aligned} y&=(3t^2-4t)(x-t)+t^3-2t^2\\ &=(3t-4)tx-2t^2(t-1)\end{aligned}$$

である．

この接線が点 A を通るため，$(x,\ y)=(\alpha,\ \alpha^3-2\alpha^2)$ を代入すると

$$\alpha^3-2\alpha^2=(3t-4)t\alpha-2t^2(t-1)$$

である．これを整理すると

$$2t^3-(3\alpha+2)t^2+4\alpha t+\alpha^3-2\alpha^2=0$$

である．この方程式は $t=\alpha$ を解にもつことに注意すると

$$(t-\alpha)(t-\alpha)(2t+\alpha-2)=0$$

と因数分解される．したがって，$t\neq\alpha$ より $t=\dfrac{2-\alpha}{2}$ である．

よって，求める接線 l の傾きは

$$3\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)^2-4\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{3\alpha^2-4\alpha-4}{4}$$

であり，y 切片は

$$-2t^2(t-1)=-2\times\frac{(\alpha-2)^2}{4}\times\left(-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\alpha^3-4\alpha^2+4\alpha}{4}$$

である．

よって，求める接線 l の方程式は

$$\boldsymbol{y = \frac{3\alpha^2 - 4\alpha - 4}{4}x + \frac{\alpha^3 - 4\alpha^2 + 4\alpha}{4}}$$

である．

(2)　点 C の x 座標を x_0 とおくと (1) より

$$\frac{3\alpha^2 - 4\alpha - 4}{4}x_0 + \frac{\alpha^3 - 4\alpha^2 + 4\alpha}{4} = 0$$

である．これを解くと

$$x_0 = \frac{\alpha(2-\alpha)}{3\alpha+2}$$

である．よって

$$\mathrm{AB} = 0 - (\alpha^3 - 2\alpha^2) = 2\alpha^2 - \alpha^3 = \alpha^2(2-\alpha)$$

および

$$\mathrm{BC} = \alpha - \frac{\alpha(2-\alpha)}{3\alpha+2} = \frac{4\alpha^2}{3\alpha+2}$$

であるため，三角形 ABC の面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \times \mathrm{AB} \times \mathrm{BC} = \frac{1}{2} \times \alpha^2(2-\alpha) \times \frac{4\alpha^2}{3\alpha+2} = \frac{-2\alpha^5 + 4\alpha^4}{3\alpha+2}$$

である．以上より

$$T = \boldsymbol{-2\alpha^5 + 4\alpha^4}$$

(3)

$$S(\alpha) = \frac{-2\alpha^5 + 4\alpha^4}{3\alpha+2} \qquad \left(\frac{4}{3} < \alpha < 2\right)$$

とおく．微分すると

$$\begin{aligned} S'(\alpha) &= \frac{(3\alpha+2)(-10\alpha^4 + 16\alpha^3) - 3(-2\alpha^5 + 4\alpha^4)}{(3\alpha+2)^2} \\ &= \frac{6\alpha^2 - 12\alpha - 30\alpha^2 + 28\alpha + 32}{(3\alpha+2)^2} \times \alpha^3 \\ &= -\frac{8\alpha^3(3\alpha^2 - 2\alpha - 4)}{(3\alpha+2)^2} \end{aligned}$$

したがって，極値をとる α は $3\alpha^2 - 2\alpha - 4 = 0$ の解で与えられる．これを解くと $\alpha = \dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{3}$ である．よって．増減表は次のようになる．

α	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	$\frac{1+\sqrt{13}}{3}$	$\cdots$	2
$S'(\alpha)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$S(\alpha)$		$\nearrow$		$\searrow$	

ゆえに $S(\alpha)$ が最大値をとる α は $\boldsymbol{\dfrac{1+\sqrt{13}}{3}}$ である．

講評

［Ｉ］［三角比］(易)：よくある構図の三角比の問題であった．ここは完答したい．

［Ⅱ］［二次関数・図形と方程式］（標準）：接する二次関数と円に関する問題であった．図形的な性質をうまく捉えることでシンプルな計算に帰着させたいところ．

［Ⅲ］［三次関数］（標準）：三次関数の接線に関する問題であった．全体的に計算量が多く，苦戦した受験生も多かったであろう．

昨年度に比べるとやや難化した．計算の正確さが求められるセットであっただろう．計算量が控えめな前半で確実に得点したい．正規合格ラインは 70% 程度か。