医学部専門予備校 YMS
医学部進学予備校 メビオ　医学部専門予備校 英進館メビオ 福岡校

解答速報

聖マリアンナ医科大学（後期）　数学

2026年 3月 3日実施

$\boxed{1}$

以下の (1) に対する解答と (2) の $\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$ にあてはまる適切な数（それ以上，約分できない数）を解答用紙の所定の欄に記入せよ．

(1)　整数の組 $(p,\ q,\ r,\ s)$ で，次の条件 (A)，(B) を満たすものを考える．

$$\text{(A)}\quad 3 \leqq p \leqq q \leqq r \leqq s$$

$$\text{(B)}\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$$

(i)　条件 (A)，(B) を満たす整数の組 $(p,\ q,\ r,\ s)$ で，さらに条件 $p<q$ も満たすとする．このとき次の不等式 (a)〜(d) のうち，正しいものをすべて選び，その記号を解答用紙の所定の欄に記入せよ．

$(a)\quad \dfrac{1}{p}<\dfrac{1}{q}$　　　$(b)\quad \dfrac{1}{p}>\dfrac{1}{q}$

$(c)\quad \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{r}+\dfrac{1}{s}<\dfrac{4}{s}$　　　$(d)\quad \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{r}+\dfrac{1}{s}<\dfrac{4}{p}$

(ii)　(A)，(B) を満たす整数の組 $(p,\ q,\ r,\ s)$ をすべて答えよ．

(2)　変量 x のデータ $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ について，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 2n$，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 = 24n$ であるとする．

変量 y を $y=\dfrac{x-1}{2}$ とする．変量 y のデータの平均 $\overline{y}=\boxed{\text{ア}}$ であり，変数 y のデータの分散 ${s_y}^2=\boxed{\text{イ}}$ である．

$\boxed{\text{解答}}$

(1)　(i)　$0<p<q$ より，$\dfrac{1}{p}>\dfrac{1}{q}$ である。

また，$\dfrac{1}{p}>\dfrac{1}{q}\geqq\dfrac{1}{r}\geqq\dfrac{1}{s}$ より

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}+\frac{1}{s}<\frac{1}{p}+\frac{1}{p}+\frac{1}{p}+\frac{1}{p}=\frac{4}{p}$$ である。

よって，正しい選択肢は (b)，(d) である。

(ii)　(i) より，$p<q$，$p=q$ のときとで場合分けして考える。

・$p<q$ のとき，

(i) より，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{r}+\dfrac{1}{s}<\dfrac{4}{p}$ を用いて

$1<\dfrac{4}{p} \iff p<4$ である。$p\geqq 3$ より，$p=3$ である。

このとき，与式は $\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{r}+\dfrac{1}{s}=\dfrac{2}{3}$ であり，$\dfrac{1}{q}\geqq\dfrac{1}{r}\geqq\dfrac{1}{s}$ を用いて同様に考えることにより

$\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{r}+\dfrac{1}{s}\leqq\dfrac{3}{q}$ であるので

$\dfrac{2}{3} \leqq \dfrac{3}{q} \iff q \leqq \dfrac{9}{2}$ である。$q > p$ より，$q = 4$ である。

$q = 4$ のとき，与式は $\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{s} = \dfrac{5}{12}$ であり，全く同様にして $r \leqq \dfrac{24}{5}$ となるので，$r = 4$ が必要であり，このとき $s = 6$ で条件を満たすので

$$(p,\ q,\ r,\ s) = (3,\ 4,\ 4,\ 6)$$

・$p = q$ のとき，

与式は $\dfrac{2}{q} + \dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{s} = 1$ であり，これまでと同様にして $q \leqq 4$ が得られる。

したがって，$(p,\ q) = (3,\ 3),\ (4,\ 4)$ である。

$(p,\ q) = (3,\ 3)$ のとき，与式は $\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{s} = \dfrac{1}{3}$ であり，全く同様にして $r \leqq 6$ となるので，$r = 3,\ 4,\ 5,\ 6$ が必要であり，このうち s が条件を満たすものを考えて

$$(p,\ q,\ r,\ s) = (3,\ 3,\ 4,\ 12),\ (3,\ 3,\ 6,\ 6)$$

$(p,\ q) = (4,\ 4)$ のとき，与式は $\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{s} = \dfrac{1}{2}$ であり，全く同様にして $r \leqq 4$ となるので，$r = 4$ が必要であり，このとき $s = 4$ が条件を満たすので

$$(p,\ q,\ r,\ s) = (4,\ 4,\ 4,\ 4)$$

よって，以上より求める整数の組 $(p,\ q,\ r,\ s)$ は

$$(p,\ q,\ r,\ s) = \mathbf{(3,\ 3,\ 4,\ 12),\ (3,\ 3,\ 6,\ 6),\ (3,\ 4,\ 4,\ 6),\ (4,\ 4,\ 4,\ 4)}$$

$\boxed{\text{注釈}}$

(i) の誘導に従わずに $p < q$，$p = q$ のときとで場合分けせずに計算してもよい。

(2)　x の平均 $\overline{x}$ は $\overline{x} = \dfrac{2n}{n} = 2$，分散 ${s_x}^2$ は ${s_x}^2 = \overline{x^2} - (\overline{x})^2 = \dfrac{24n}{n} - (2)^2 = 20$ である。

よって，求める y の平均 $\overline{y}$ と分散 ${s_y}^2$ は，$y = \dfrac{x-1}{2}$ より

$$\overline{y} = \frac{\overline{x} - 1}{2} = \frac{2-1}{2} = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

$${s_y}^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 {s_x}^2 = \frac{1}{4} \cdot 20 = \mathbf{5}$$

$\boxed{2}$

α を複素数とし，複素数平面上において，複素数 z についての方程式

$$|z| = 3\,|z-\alpha| \ \cdots\cdots (*)$$

を満たす点 $\mathrm{P_0}\,(z)$ 全体が表す図形を C とする．なお i で虚数単位を表すものとする．以下の (1)〜(4) の $\boxed{\text{ウ}}$ 〜 $\boxed{\text{ケ}}$ にあてはまる適切な数や式（それ以上, 約分できない数または式）を解答用紙の所定の欄に記入せよ．

(1)　$\alpha = i$ のとき，z についての方程式 $(*)$ を満たす純虚数 z は 2 つあり，複素数平面上で原点に近い方から順に $\boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{エ}}$ である．

(2)　$\alpha \fallingdotseq 0$ のとき，図形 C は中心 $\mathrm{P_1}\left(\boxed{\text{オ}}\right)$，半径 $\boxed{\text{カ}}$ の円である．

(3)　(2) で求めた円が点 $\mathrm{Q}\,(i)$ を通るような点 $\mathrm{P}\,(\alpha)$ 全体のなす図形は中心 $\mathrm{P_2}\left(\boxed{\text{キ}}\right)$，半径 $\boxed{\text{ク}}$ の円である．

(4)　(3) の図形上の点 $\mathrm{P}\,(\alpha)$ について, 偏角が最大となる α は $\boxed{\text{ケ}}$ である．ただし, α の偏角は $0 \leqq \arg\alpha < 2\pi$ とする．

解答

(1)　複素数平面上において，$\mathrm{O}(0)$，$\mathrm{A_0}(i)$，$\mathrm{P}(z)$ とする。
$z = i$ のとき

$$|z| = 3|z-i| \ \cdots\cdots ①$$

$$|z| : |z-i| = 3 : 1$$

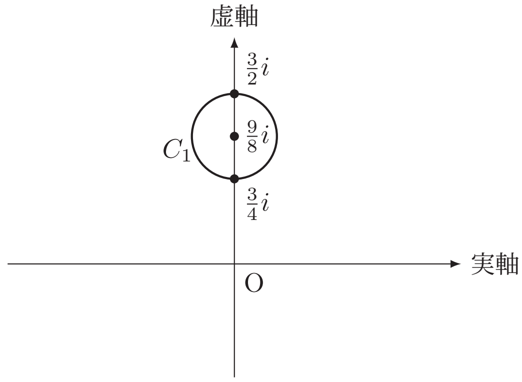
$$\therefore\ \mathrm{PO} : \mathrm{PA_0} = 3 : 1$$

であるから，点 P は線分 $\mathrm{OA_0}$ を 3 : 1 に内分する点 K，外分する点 L を直径の両端とする円周 C_1 を描く（アポロニウスの円)。
K，L を表す複素数はそれぞれ

$$\frac{1\cdot 0 + 3\cdot i}{3+1} = \frac{3}{4}i$$

$$\frac{(-1)\cdot 0 + 3\cdot i}{3-1} = \frac{3}{2}i$$

である。



①を満たす純虚数は，C_1 と虚軸の交点を表す複素数なので，
K，L を表す複素数そのものである。ゆえに答えは

$$\boldsymbol{\frac{3}{4}i,\ \frac{3}{2}i}$$

(2)　(1) と同様に，A(α) とする。

$$|z| = 3|z-\alpha|$$

$$|z| : |z-\alpha| = 3 : 1$$

$$\therefore\ \mathrm{PO} : \mathrm{PA_0} = 3 : 1$$

であるから，点 P は線分 OA を 3 : 1 に内分する点 M，外分する点 N を直径の両端とする円周 C を描く。
$\mathrm{M}\left(\dfrac{3}{4}\alpha\right)$，$\mathrm{N}\left(\dfrac{3}{2}\alpha\right)$ であるから，円 C の中心 $\mathrm{P_1}$ は

$$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\alpha + \frac{3}{2}\alpha\right) = \frac{9}{8}\alpha$$

円 C_1 の半径は

$$\mathrm{P_1M} = \left|\frac{8}{9}\alpha - \frac{3}{4}\alpha\right| = \frac{3}{8}|\alpha|$$

ゆえに，図形 C は中心 $\mathrm{P_1}\left(\boldsymbol{\dfrac{9}{8}\alpha}\right)$，半径 $\boldsymbol{\dfrac{3}{8}|\alpha|}$ の円である。

(3)　円 C が点 Q(i) を通るとき，①に $z=i$ を代入した

$$|i| = 3|i-\alpha|$$

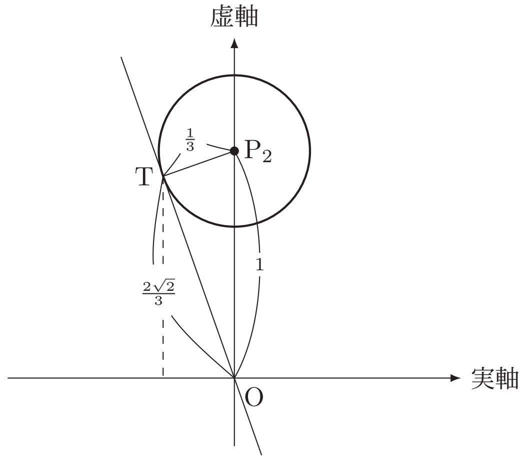
$$\therefore\ |\alpha - i| = \frac{1}{3}$$

を満たすから，求める P(α) の全体は

中心 $\mathrm{P_2}(\boldsymbol{i})$，半径 $\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$ の円

である。

(4)　(3) の円を図示すると，次の図のようになる。



円 C 上の点 P(α) のうち偏角が最大となるのは，P が図の点 T に一致するときである。
直角三角形 $\mathrm{OTP_2}$ に着目して，$\mathrm{T}\left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{9} + \dfrac{8}{9}i\right)$ がわかるので，

$$\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{9} + \frac{8}{9}i$$

$\boxed{3}$

$a_1 = \dfrac{1}{3}$ とし，座標平面上の 2 点 $(0,\ -1)$，$(a_1,\ 0)$ を通る直線を l_1 とする．点 $(0,\ 1)$ を通り l_1 と直交する直線と l_1 の共有点の x 座標を a_2 とする．

同様にして $n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots$ に対し，2 点 $(0,\ -1)$，$(a_n,\ 0)$ を通る直線 l_n と点 $(0,\ 1)$ を通り l_n と直交する直線との共有点の x 座標を a_{n+1} とする．

以下の (1)，(2)，(4) の $\boxed{\text{コ}}$ ～ $\boxed{\text{セ}}$ にあてはまる適切な数または式（それ以上，約分できない数または式）と (3) に対する解答を解答用紙の所定の欄に記入せよ．

(1)　直線 l_n の方程式は $x - a_n y = \boxed{\text{コ}}$ である．

(2)　直線 l_n と直交し点 $(0,\ 1)$ を通る直線の方程式は $a_n x + y = \boxed{\text{サ}}$ である．また，a_{n+1} を a_n で表すと $a_{n+1} = \boxed{\text{シ}}$ となる．

(3)　$n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して $0 < a_n < 1$ となることを数学的帰納法を用いて示せ．

(4)　正の数 θ_n を用いて，$a_n = \dfrac{2^{\theta_n} - 1}{2^{\theta_n} + 1}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ と表す．このとき，θ_{n+1} を θ_n で表すと $\theta_{n+1} = \boxed{\text{ス}}$ となる．したがって θ_n は n を用いて $\theta_n = \boxed{\text{セ}}$ と表せる．

$\boxed{\text{解答}}$

(1)　2 点 $(0,\ -1)$，$(a_1,\ 0)$ を通る直線の方程式は $x - a_n y = \boldsymbol{a_n}$ である．

(2)　直線 l_n と直交し点 $(0,\ 1)$ を通る直線の方程式は $a_n x + y = \mathbf{1}$ である．この直線の方程式の両辺を a_n 倍して $x - a_n y = a_n$ に辺々加え両辺を ${a_n}^2 + 1$ で割ると，l_n と 直線 l_n と直交し点 $(0,\ 1)$ を通る直線の交点の x 座標すなわち a_{n+1} が $\boldsymbol{\dfrac{2a_n}{{a_n}^2 + 1}}$ と導ける．

(3)　$n = 1$ のときは $0 < a_n < 1$ である．

$n = k$ のときに $0 < a_n < 1$ が成立すると仮定する．ただし，k は正の整数である．すると，$\dfrac{2a_k}{{a_k}^2 + 1} > 0$ なので $a_{k+1} > 0$ である．

よって，${a_k}^2 > 0$ と $1 > 0$ で，しかも相異なるので，相加平均と相乗平均の大小関係により，

$$\begin{aligned} \frac{2a_k}{{a_k}^2 + 1} &< \frac{2a_k}{2\sqrt{{a_k}^2 \cdot 1}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

なので $a_{k+1} < 1$ である．

以上のことから，$n = k + 1$ のときも $0 < a_n < 1$ が成立する．

以上より，$n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ に対して $0 < a_n < 1$ となることが数学的帰納法を用いて示された．

(4)　等式 $a_{n+1} = \dfrac{2a_n}{{a_n}^2 + 1}$ に，$a_{n+1} = \dfrac{2^{\theta_{n+1}} - 1}{2^{\theta_{n+1}} + 1}$ すなわち $a_{n+1} = 1 - \dfrac{2}{2^{\theta_{n+1}} + 1}$ を，および $a_n = \dfrac{2^{\theta_n} - 1}{2^{\theta_n} + 1}$ すなわち $a_n = 1 - \dfrac{2}{2^{\theta_n} + 1}$ を代入すると

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{2a_n}{{a_n}^2 + 1} \\ 1 - \frac{2}{2^{\theta_{n+1}} + 1} &= \frac{2\left(1 - \dfrac{2}{2^{\theta_n} + 1}\right)}{\left(1 - \dfrac{2}{2^{\theta_n} + 1}\right)^2 + 1} \end{aligned}$$

$$\frac{2}{2^{\theta_{n+1}}+1}=\frac{\left(\dfrac{2}{2^{\theta_n}+1}\right)^2}{\left(1-\dfrac{2}{2^{\theta_n}+1}\right)^2+1}$$

$$\frac{2}{2^{\theta_{n+1}}+1}=\frac{2^2}{\left(2^{\theta_n}+1-2\right)^2+\left(2^{\theta_n}+1\right)^2}$$

$$\frac{2}{2^{\theta_{n+1}}+1}=\frac{2^2}{2\left(2^{2\theta_n}+1\right)}$$

$$2^{\theta_{n+1}}+1=2^{2\theta_n}+1$$

$$2^{\theta_{n+1}}=2^{2\theta_n}$$

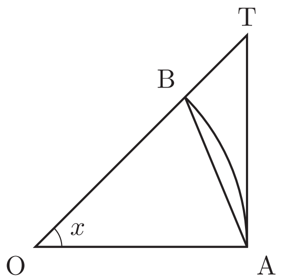
底が 1 より大きいので $\theta_{n+1}=\boldsymbol{2\theta_n}$ である．$\theta_1=1$ のとき $a_1=\dfrac{1}{3}$ となるので，$\theta_1=1$ である．これと $\theta_{n+1}=2\theta_n$ をあわせて，$\theta_n=\boldsymbol{2^{n-1}}$ となる．

$\boxed{4}$

以下の (1) の $\boxed{\text{ソ}}$ ～ $\boxed{\text{チ}}$ にあてはまる適切な式 (それ以上，約分できない式) と (2) に対する解答を解答用紙の所定の欄に記入せよ．

(1)　下図は点 O を中心，半径 $\mathrm{OA} = 1$ の円から中心角 x $\left(\text{ラジアン，} 0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ の扇形 OAB を切り抜き線分を書き加えたものであり，点 T は円周上の点 A における円の接線と直線 OB の交点である．

x を用いて △OAB，扇形 OAB，△OAT の面積を表すと，△OAB の面積は $\boxed{\text{ソ}}$，扇形 OAB の面積は $\boxed{\text{タ}}$，△OAT の面積は $\boxed{\text{チ}}$ である．



(2)　(1) の結果を用いて $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ を示せ．

$\boxed{\text{解答}}$

(1)

$$\triangle\mathrm{OAB} = \frac{1}{2}\times\mathrm{OA}\times\mathrm{OB}\times\sin x = \boldsymbol{\frac{1}{2}\sin x}$$

$$\text{扇形 OAB} = \frac{1}{2}\times\mathrm{OA}^2\times x = \boldsymbol{\frac{1}{2}x}$$

$$\triangle\mathrm{OAT} = \frac{1}{2}\times\mathrm{OA}\times\mathrm{OT} = \boldsymbol{\frac{1}{2}\tan x}$$

(2)　まず $x > 0$ のときを考える．図より △OAB $<$ 扇形 OAB $<$ △OAT であるため

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x$$

である．$\sin x < x$ より $\dfrac{\sin x}{x} < 1$ を得る．また，$x < \tan x$ の辺々に $\dfrac{\cos x}{x}$ を掛けることで $\cos x < \dfrac{\sin x}{x}$ を得る．こうして

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

を得る．$\displaystyle\lim_{x\to +0}\cos x = 1$ であるため，はさみうちの原理から

$$\lim_{x\to +0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

である．

$x < 0$ のとき，$y = -x$ とおくと $x \to -0$ で $y \to +0$ であるため，

$$\lim_{x\to -0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{y\to +0}\frac{\sin(-y)}{-y} = \lim_{y\to +0}\frac{-\sin y}{-y} = \lim_{y\to +0}\frac{\sin y}{y} = 1$$

である．

よって $\displaystyle\lim_{x\to +0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to -0}\frac{\sin x}{x} = 1$ より $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ が示された．

講評

$\boxed{1}$［小問集合］（やや易）：(1) 整数の方程式，(2) データの分析からの出題であった。(1) は不等式から解の候補を絞ればよい。(2) は変量変換の公式を覚えていればすぐに終わるだろう。

$\boxed{2}$［複素数平面］（やや易）：複素数平面からの出題であった。軌跡を教科書通り処理してもよいし，アポロニウスの円を利用してもよい。なるべく落としたくない。

$\boxed{3}$［数列］（やや易）：点列からの出題であった。誘導に丁寧に乗っていけばよく，特に難しい考え方を用いる設問はない。

$\boxed{4}$［極限］（やや難）：$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ の証明に関する出題であった。教科書をしっかりと読んでいれば出てくる内容であるが，証明まで押さえられている受験生は少ないだろう。左側極限に注意したい。

昨年度に比べるとやや易化した。どれも完答を目指せる問題で程よく差がつくセットであった。一次突破ボーダーは 70% 弱程度か。