医学部専門予備校 YMS

医学部進学予備校 メビオ　医学部専門予備校 英進館メビオ 福岡校

解答速報

昭和医科大学医学部（Ⅱ期）　数学

2026年 3月 7日実施

$\boxed{1}$

k, n は正の整数として，二項係数 ${}_n\mathrm{C}_k = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$ を考える。$(1+x)^n$ の二項展開を利用し以下の $\boxed{\text{(a)}}$ から $\boxed{\text{(d)}}$ を n の式で表せ。ただし，結果は可能な限り共通因数でまとめること。

(1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k = \boxed{\text{(a)}}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k k = \boxed{\text{(b)}} \times \frac{\boxed{\text{(a)}}}{2}$

(3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k k^2 = \boxed{\text{(c)}} \times \frac{\boxed{\text{(a)}}}{2^2}$

(4) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k k^3 = \boxed{\text{(d)}} \times \frac{\boxed{\text{(a)}}}{2^3}$

$\boxed{\text{解答}}$

(1)　二項定理より

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k x^k$$

$x=1$ を代入して

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k 1^k$$

$$\therefore\ \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k = \boldsymbol{2^n}$$

(2)　$1 \leqq k \leqq n$ において

$$k\,{}_n\mathrm{C}_k = n\,{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$$

が成り立つことから

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k\cdot{}_n\mathrm{C}_k &= \sum_{k=1}^{n} k\cdot{}_n\mathrm{C}_k\\ &= \sum_{k=1}^{n} n\cdot{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}\\ &= n\sum_{k=1}^{n} {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}\\ &= n\sum_{j=0}^{n-1} {}_{n-1}\mathrm{C}_{j} \qquad (\because\ j=k-1\text{ とおいた})\\ &= n\cdot 2^{n-1} \qquad (\because\ (1)\text{ の結果より})\\ &= \boldsymbol{n\times\frac{2^n}{2}}\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k^2\cdot{}_n\mathrm{C}_k &= \sum_{k=0}^{n}\{k(k-1)+k\}\cdot{}_n\mathrm{C}_k\\ &= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\cdot{}_n\mathrm{C}_k + \sum_{k=0}^{n} k\cdot{}_n\mathrm{C}_k\end{aligned}$$

ここで，第 2 項は (2) より $n\cdot 2^{n-1}$ である。
また，第 1 項については，$2\leqq k\leqq n$ において

$$k(k-1){}_n\mathrm{C}_k = n(n-1){}_{n-2}\mathrm{C}_{k-2}$$

が成り立つことから

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\cdot{}_n\mathrm{C}_k &= \sum_{k=2}^{n} n(n-1)\cdot{}_{n-2}\mathrm{C}_{k-2}\\ &= n(n-1)\sum_{k=2}^{n} {}_{n-2}\mathrm{C}_{k-2}\\ &= n(n-1)\sum_{j=0}^{n-2} {}_{n-2}\mathrm{C}_{j} \qquad (\because\ j=k-2\text{ とおいた})\\ &= n(n-1)\cdot 2^{n-2} \qquad (\because\ (1)\text{ の結果より})\end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k^2\cdot{}_n\mathrm{C}_k &= n(n-1)2^{n-2} + n\cdot 2^{n-1}\\ &= n(n-1)2^{n-2} + 2n\cdot 2^{n-2}\\ &= \{n(n-1)+2n\}2^{n-2}\\ &= n(n+1)2^{n-2}\\ &= \boldsymbol{n(n+1)\times\frac{2^n}{2^2}}\end{aligned}$$

(4)

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 \cdot {}_n\mathrm{C}_k = \sum_{k=0}^{n} \{k(k-1)(k-2) + 3k(k-1) + k\} \cdot {}_n\mathrm{C}_k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)(k-2) \cdot {}_n\mathrm{C}_k + 3\sum_{k=0}^{n} k(k-1) \cdot {}_n\mathrm{C}_k + \sum_{k=0}^{n} k \cdot {}_n\mathrm{C}_k$$

ここで，第 2 項，第 3 項については，(2)(3) の過程より

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1){}_n\mathrm{C}_k = n(n-1)2^{n-2}, \quad \sum_{k=0}^{n} k{}_n\mathrm{C}_k = n \cdot 2^{n-1}$$

である。

また，第 1 項については，$3 \leqq k \leqq n$ において

$$k(k-1)(k-2){}_n\mathrm{C}_k = n(n-1)(n-2){}_{n-3}\mathrm{C}_{k-3}$$

が成り立つことにより

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)(k-2) \cdot {}_n\mathrm{C}_k = \sum_{k=3}^{n} n(n-1)(n-2) \cdot {}_{n-3}\mathrm{C}_{k-3}$$

$$= n(n-1)(n-2)\sum_{k=3}^{n} {}_{n-3}\mathrm{C}_{k-3}$$

$$= n(n-1)(n-2)\sum_{j=0}^{n-3} {}_{n-3}\mathrm{C}_{j} \qquad (\because \ j = k-3 \text{ とおいた})$$

$$= n(n-1)(n-2)2^{n-3}$$

したがって

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 \cdot {}_n\mathrm{C}_k = n(n-1)(n-2)2^{n-3} + 3n(n-1)2^{n-2} + n \cdot 2^{n-1}$$

$$= n \cdot 2^{n-3}\{(n-1)(n-2) + 3(n-1) \cdot 2 + 1 \cdot 4\}$$

$$= n \cdot 2^{n-3}(n^2 - 3n + 2 + 6n - 6 + 4)$$

$$= n \cdot 2^{n-3}(n^2 + 3n)$$

$$= n^2(n+3)2^{n-3}$$

$$= \boldsymbol{n^2(n+3) \times \frac{2^n}{2^3}}$$

別解

微分法を用いると，次のようになる。

(1)　二項定理より

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k x^k \ \cdots\cdots ①$$

$x = 1$ を代入して

$$\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k = \boldsymbol{2^n}$$

(2)　①の両辺を x で微分すると

$$
\begin{aligned}
n(x+1)^{n-1} &= \sum_{k=1}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \cdot kx^{k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \cdot kx^{k-1} \quad \cdots\cdots②
\end{aligned}
$$

この両辺に $x=1$ を代入して

$$
\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k k = n \cdot 2^{n-1} = \boldsymbol{n \times \frac{2^n}{2}}
$$

(3)　②の両辺に x をかけて

$$
nx(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \cdot kx^k \quad \cdots\cdots③
$$

③の両辺を x で微分して

$$
\begin{aligned}
n\{(1+x)^{n-1}+(n-1)x(1+x)^{n-2}\} &= \sum_{k=1}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \cdot k^2x^{k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \cdot k^2x^{k-1}
\end{aligned}
$$

この両辺に $x=1$ を代入して

$$
n\{2^{n-1}+(n-1)2^{n-2}\} = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \cdot k^2
$$

$$
\therefore \quad \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \cdot k^2 = n(n+1)2^{n-2} = \boldsymbol{n(n+1) \times \frac{2^n}{2^2}}
$$

(4)　③の両辺に x をかけて

$$
n\{x(1+x)^{n-1}+(n-1)x^2(1+x)^{n-2}\} = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \cdot k^2x^k
$$

両辺を x で微分して

$$
\begin{aligned}
&n\{(1+x)^{n-1}+(n-1)x(1+x)^{n-2}+2(n-1)x(1+x)^{n-2}+(n-1)(n-2)x^2(1+x)^{n-3}\} \\
&\qquad = \sum_{k=1}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \cdot k^3x^{k-1} \\
&\qquad = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \cdot k^3x^{k-1}
\end{aligned}
$$

この両辺に $x=1$ を代入して

$$
n\{2^{n-1}+3(n-1)2^{n-2}+(n-1)(n-2)2^{n-3}\} = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \cdot k^3
$$

$$
\therefore \quad \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \cdot k^3 = n^2(n+3)2^{n-3} = \boldsymbol{n^2(n+3) \times \frac{2^n}{2^3}}
$$

$\boxed{2}$

次の各問いに答えよ。ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

(1)(1-1)　関数 $f(x)=\sqrt{x}\ (1 \leqq x \leqq 2025)$ に対して

$$\frac{f(2025)-f(1)}{2025-1}=f'(c),\quad 1<c<2025$$

を満たす実数 c の値を求めよ。ここで，$f'(c)$ は $x=c$ における微分係数を表す。

(1-2)　1 次の近似式を用いて $\sqrt{2025+1}$ の近似値を小数点第 4 位まで求めよ。

(2)　x，y が関係式

$$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}=1,\quad y \fallingdotseq 0$$

を満たすとき，次の $\boxed{}$ を x，y を用いて答えよ。

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\boxed{(2\text{-}1)}}{\boxed{(2\text{-}2)}},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-8}{\boxed{(2\text{-}3)}}$$

(3)　次の関係式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。ただし，$f'(t)$ は $f(t)$ の導関数を表す。

$$f(x)=1+x^x+\int_1^{e^2} t^{-t}f'(t)\,dt,\quad x>0$$

(4)　平面上に点 O，A，B をとり $\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=\sqrt{5}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=4$ とする。3 点 O，A，B と同一平面上に次の 2 つの条件：

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=2+\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=1+\sqrt{2}$$

を満たす点 C をとる。このとき，次の $\boxed{}$ を適切な数値で埋めよ。

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2=\frac{\boxed{(4\text{-}1)}}{\boxed{(4\text{-}2)}},\quad \cos\angle\mathrm{ABC}=\frac{\boxed{(4\text{-}3)}}{\boxed{(4\text{-}4)}}$$

解答

(1)(1-1)　$2025=45^2$ であるので

$$\frac{f(2025)-f(1)}{2025-1}=f'(c)$$
$$\iff \frac{44}{2024}=\frac{1}{2\sqrt{c}}$$
$$\iff \sqrt{c}=23$$

となり，$c=\mathbf{529}$ を得る。

(1-2)　$\sqrt{2025+1}=45\sqrt{1+\dfrac{1}{2025}}$ である。

$y=\sqrt{1+x}$ について，$(0,\ 1)$ における接線の方程式を求めると，$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$ より

$$y=\frac{1}{2}x+1$$

となる。したがって，$x \fallingdotseq 0$ のとき，$\sqrt{1+x} \fallingdotseq \dfrac{1}{2}x+1$ と一次近似できる。

よって，求める近似値は小数第 4 位まで求めて

$$
\begin{aligned}
45\sqrt{1+\frac{1}{2025}} &\fallingdotseq 45\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2025}+1\right)\\
&= \frac{1}{90}+45 = \mathbf{45.0111}
\end{aligned}
$$

(2) $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{4}=1$ の両辺を x で微分して

$$x-\frac{dy}{dx}\cdot\frac{y}{2}=0$$

したがって，$y \fallingdotseq 0$ のとき

$$\frac{dy}{dx}=\boldsymbol{\frac{2x}{y}}$$

である。さらに

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)\\
&= \frac{d}{dx}\left(\frac{2x}{y}\right)\\
&= 2\cdot\frac{y-x\cdot\frac{dy}{dx}\cdot 1}{y^2}\\
&= 2\cdot\frac{y-x\cdot\frac{2x}{y}}{y^2}\\
&= 2\cdot\frac{y^2-2x^2}{y^3}\\
&= \frac{-8\cdot\left(\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}\right)}{y^3}\\
&= \boldsymbol{\frac{-8}{y^3}}
\end{aligned}
$$

(3) $\displaystyle\int_1^{e^2} t^{-t}f'(t)dt=k$ ……① とおくと，k は x および t を用いずに書かれる定数で，与式は

$$f(x)=x^x+k+1 \ \cdots\cdots ②$$

である。ここで，関数 $y=x^x$ $(x>0)$ の導関数を考える。
両辺正であることから，自然対数をとって $\log y = x\log x$ となるので，両辺を x で微分することで

$$\frac{y'}{y}=\log x+1 \iff y'=x^x(\log x+1)$$

を得る。したがって，②より $f'(x)=x^x(\log x+1)$ となるので，これを①に代入して

$$
\begin{aligned}
&\int_1^{e^2} t^{-t}\cdot t^t(\log t+1)dt=k\\
\iff &\int_1^{e^2}(\log t+1)dt=k\\
\iff &\Big[t(\log t-1)+t\Big]_1^{e^2}=k\\
\iff &k=2e^2
\end{aligned}
$$

よって，②より $f(x) = \boldsymbol{x^x + 2e^2 + 1}$ である。

(4)　C は一直線上にない 3 点 O，A，B が作る平面上に存在するので，実数 s，t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とできる。

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = 2 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = 1 + \sqrt{2}$ に代入して計算すると

$\begin{cases} 5s + 4t = 2 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 4s + 5t = 1 + \sqrt{2} \end{cases}$ を得るので，これを解いて $\begin{cases} s = \dfrac{4 - \sqrt{2}}{6} \\ t = \dfrac{-1 + \sqrt{2}}{3} \end{cases}$ となる。

よって，$s + t = \dfrac{2 + \sqrt{2}}{6}$，$st = \dfrac{-6 + 5\sqrt{2}}{18}$ を用いて

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 &= |s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 \\ &= 5s^2 + 8st + 5t^2 \\ &= 5(s+t)^2 - 2st \\ &= \boldsymbol{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

また，

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (t-1)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} &= s|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 + (-1 - s + t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} - (t-1)|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 \\ &= 2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 = 2$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2 = |(s-1)\overrightarrow{\mathrm{OB}} - t\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 = \frac{9}{2} - 2\sqrt{2}$$

であるので，内積の定義を用いて

$$\begin{aligned} \cos\angle\mathrm{ABC} &= \frac{\overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{BA}}||\overrightarrow{\mathrm{BC}}|} \\ &= \frac{2 - \frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{9}{2} - 2\sqrt{2}}} \\ &= \frac{2 - \frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{9 - 2\sqrt{8}}} \\ &= \frac{2 - \frac{1}{\sqrt{2}}}{2\sqrt{2} - 1} \\ &= \frac{2 - \frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}(2 - \frac{1}{\sqrt{2}})} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{2}}} \end{aligned}$$

である。

注釈

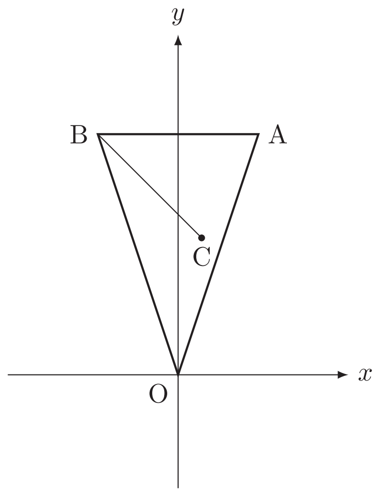
文字のままではなく，数値で計算する場合は

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\frac{4-\sqrt{2}}{6}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-2\overrightarrow{\mathrm{OB}})$$

であるから，θ が $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ と $(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-2\overrightarrow{\mathrm{OB}})$ のなす角であることを利用すると計算の負担を減らすことができる。

別解

座標軸を設定する。



$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|$ より，A と B が y 軸に対して対称になるように座標軸を設定すると，
0 以上の実数 $k,\ l$ を用いて $\mathrm{A}(k,\ l)$, $\mathrm{B}(-k,\ l)$ とおける。

このとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=\sqrt{5}$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=4$ より，$\begin{cases} k^2+l^2=5 \\ -k^2+l^2=4 \end{cases}$ となるので $\begin{cases} k^2=\dfrac{1}{2} \\ l^2=\dfrac{9}{2} \end{cases}$ となる。

これと $k,\ l$ が 0 以上の実数であることより $\begin{cases} k=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ l=\dfrac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ となる。

$\mathrm{C}(x,\ y)$ とおくと，

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=2+\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=1+\sqrt{2} \end{cases}$$

より

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{2}x+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}y=2+\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}y=1+\sqrt{2} \end{cases}$$

であるから

$$x=\frac{\sqrt{2}-1}{2},\ y=\frac{\sqrt{2}+1}{2}$$

である。

よって

$$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)^2 = 2 \times \left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right\} = \boldsymbol{\frac{3}{2}}$$

である。

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2},\ -\sqrt{2} + \frac{1}{2}\right) = \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2},\ -\left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)\right)$$

であり，$\sqrt{2} - \dfrac{1}{2} > 0$ であることと，$\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ はベクトル $(1,\ 0)$ の正の定数倍のベクトルなので，$\angle\mathrm{ABC}$ は $\dfrac{\pi}{4}$ である。

よって $\cos\angle\mathrm{ABC} = \boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$ である。

$\boxed{3}$

$a>0$ とする。xyz 空間において，平面 $z=0$ 上で，曲線 $x^2+\dfrac{y^2}{3}=a^2$ を C_1，曲線 $\dfrac{x^2}{3}+y^2=a^2$ を C_2 とする。また，曲線 C_1 と C_2 の両方で囲まれる図形を A とし，その面積を S とする。次の各問いに答えよ。ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

(1)　C_1 と C_2 の交点の座標をすべて求めよ。ただし，解答欄には各座標を $(x,\ y,\ 0)$ の形式で記入せよ。

(2)　図形 A の面積 S を求めよ。

(3)　原点を O とする。z 軸上の点 $\mathrm{P}(0,\ 0,\ a)$，および，図形 A の境界線上の点 Q を考える。点 Q が図形 A の境界線上を 1 周するときに三角形 POQ が通過してできる立体の体積 V を求めよ。

解答

(1)　方程式

$$\begin{cases} x^2+\dfrac{y^2}{3}=a^2 & \cdots\cdots ① \\ \dfrac{x^2}{3}+y^2=a^2 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

を考える。$\dfrac{3}{4}(①+②)$ より

$$x^2+y^2=\frac{3}{2}a^2 \quad \cdots\cdots ③$$

である。$\dfrac{3}{2}(①-②)$ より

$$x^2-y^2=0$$

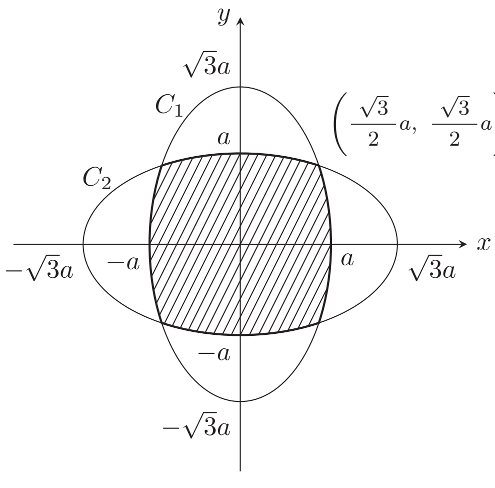
である。$x^2=y^2$ を ③ に代入することで $x^2=\dfrac{3}{4}a^2$ を得る。よって $x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$ である。また，$y=\pm x$ であるため，$y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$ である。

以上より

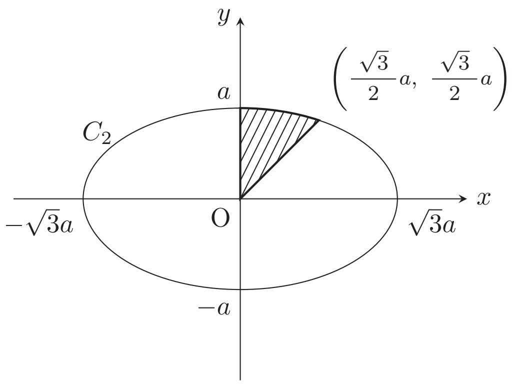
$$\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}a,\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2}a,\ 0\right) \quad (\text{複号任意})$$

である。

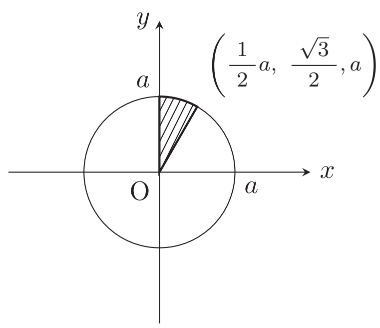
(2)　図形 A は下図の斜線部である。



対称性に注意すると図形 A の面積は，下図の斜線部の部分の面積の 8 倍である。



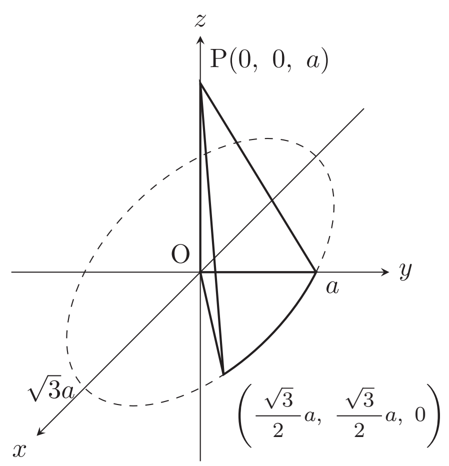
x 軸方向に $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 倍拡大すると



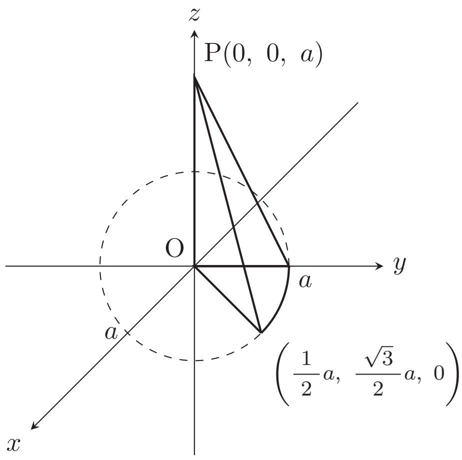
となり，これは半径 a，中心角 $\dfrac{\pi}{6}$ の扇形なので，面積は $\dfrac{1}{2}\times a^2\times\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{12}a^2$ である。

よって，$\left(\dfrac{\pi}{12}a^2\times\sqrt{3}\right)\times 8=\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}a^2}$ である。

(3)　対称性より，下図の立体の体積を 8 倍すればよい。



(2) と同様に x 軸方向に $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 倍すると，



となり，この立体の体積は

$$\left(\pi a^2 \times a \times \frac{1}{3}\right) \times \frac{1}{12} = \frac{\pi}{36}a^3$$

である。よって，求める体積は

$$V = \frac{\pi}{36}a^3 \times \sqrt{3} \times 8 = \boldsymbol{\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi a^3}$$

である。

別解

一般に錐の体積は (底面の面積) × (高さ) × $\frac{1}{3}$ で計算される。(このこと自体は積分を用いることで簡単に証明することができる。)

立体は，底面を A とする錐であるため，

$$\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi a^2 \times a \times \frac{1}{3} = \boldsymbol{\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi a^3}$$

と計算してもよい。

$\boxed{4}$

X 君と Y 君があるゲームを行う。4 つの箱が用意され，そのうちの 1 つの箱にだけ賞品が入っている。X 君はどの箱に賞品が入っているか知らない。まず X 君が 4 つの箱から 1 つの箱を選ぶ。その中に賞品が入っていれば X 君はその賞品を獲得できる。次の各問いに答えよ。ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) X 君が選んだ箱をただちに開けたとき，X 君が賞品を獲得できる確率を求めよ。

(2) X 君が選んだ箱を開ける前に，Y 君は X 君が選んだ箱以外の 3 つの箱から，無作為に 1 つの箱を選び，ただちに開けて X 君に見せたが，賞品は入っていなかった。X 君は最初に選んだ箱をそのまま選択してもよいが，Y 君が開けずに残した 2 つの箱のうちの 1 つの箱に選択をかえてもよいことにする。

(2-1) 選択をかえないときに X 君が賞品を獲得できる確率を求めよ。

(2-2) 選択をかえたときに X 君が賞品を獲得できる確率を求めよ。

(3) Y 君はどの箱に賞品が入っているか知っている。X 君が選んだ箱を開ける前に，Y 君は X 君が選んだ箱以外の 3 つの箱から，賞品が入っていない 2 つの箱を開けて X 君に見せた。X 君は最初に選んだ箱をそのまま選択してもよいが，Y 君が開けずに残した箱に選択をかえてもよいことにする。

(3-1) 選択をかえないときに X 君が賞品を獲得できる確率を求めよ。

(3-2) 選択をかえたときに X 君が賞品を獲得できる確率を求めよ。

$\boxed{\text{解答}}$

(1) 答えは, X 君が賞品のある箱を選ぶ確率で, $\boldsymbol{\frac{1}{4}}$ である。

(2)(2-1) はじめ X 君が選んだ箱に賞品がある確率は $\frac{1}{4}$ で, そのとき Y 君が見せた箱に賞品がない確率は 1 である。はじめ X 君が選んでいない箱のいずれかに賞品がある確率は $\frac{3}{4}$ で, そのとき Y 君が見せた箱に賞品がない確率は $\frac{2}{3}$ である。よって, いま, Y 君が見せた箱に賞品がないという条件のもとでの, X 君が選んだ箱に賞品がある条件つき確率は

$$\frac{\frac{1}{4}\times 1}{\frac{1}{4}\times 1+\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}}=\frac{1}{3}$$

である。よって求める確率は $\boldsymbol{\frac{1}{3}}$ である。

(2-2) Y 君が見せた箱に賞品がないという条件のもとでの, X 君が選んでいない箱のいずれかに賞品がある条件つき確率は $\left(1-\frac{1}{3}=\right)\frac{2}{3}$ である。X 君も Y 君も選んでいない箱は 2 つあり, どちらを X 君が選ぶかは無作為なので, 求める確率は

$$\frac{2}{3}\div 2=\boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

である。

(3)(3-1) Y 君は X 君の選んだ箱に賞品が入っていても入っていなくても同じように行動するので, Y 君の行動は X 君の選んだ箱に賞品が入っているかについて何の情報ももたらさない。よって, 求める確率は (1) の答えと同じで, $\boldsymbol{\frac{1}{4}}$ である。

$\boxed{\text{別解}}$

はじめ X 君が選んだ箱に賞品がある確率は $\frac{1}{4}$ で, そのとき Y 君が見せた箱に賞品がない確率は 1 である。はじめ X 君が選んでいない箱のいずれかに賞品がある確率は $\frac{3}{4}$ で, そのとき Y 君が見せた箱に賞品がない確

率は 1 である。よって, いま, Y 君が見せた箱に賞品がないという条件のもとでの, X 君が選んだ箱に賞品がある条件つき確率は

$$\frac{\frac{1}{4}\times 1}{\frac{1}{4}\times 1+\frac{3}{4}\times 1}=\frac{1}{4}$$

である。よって求める確率は $\boldsymbol{\frac{1}{4}}$ である。

(3-2) (3-1) で確率を求めた事象の余事象の確率を求めればよく（選択をかえないときに X 君が賞品を獲得できるならばかえると獲得できないし, 選択をかえたときに X 君が賞品を獲得できるならばかえないと獲得できないということ）, 求める確率は (3-1) の答えを 1 から引いて $\boldsymbol{\frac{3}{4}}$ である。

別解

Y 君が見せた箱に賞品がないという条件のもとでの, X 君が選んでいない箱のいずれかに賞品がある条件つき確率は $\left(1-\frac{1}{4}=\right)\frac{3}{4}$ である。よって求める確率は $\boldsymbol{\frac{3}{4}}$ である。

講評

$\boxed{1}$［式と証明］（標準）：二項係数の和に関する出題であった。二項係数の公式や微分法を用いるなどの方法が考えられる。経験があるとすぐに解けるが，そうでないと時間がかかってしまうだろう。

$\boxed{2}$［小問集合］（やや難）：(1)(2) 数Ⅲ微分法，(3) 数Ⅲ積分法，(4) ベクトルからの出題であった。いずれも典型的な出題であるが，やりにくい箇所もあり完答は難しいだろう。半分は押さえたい。

$\boxed{3}$［2 次曲線，数Ⅲ積分法］（標準）：楕円に関する面積，体積からの出題であった。(2) は拡大・縮小変換を用いて計算量少なく済ませたい。ここ最近だと久留米大学で出題があった。

$\boxed{4}$［確率］（やや難）：条件付き確率からの出題であった。論理構造を冷静に読み解けば計算はほとんどいらないが，限られた時間の中で完答するのは中々難しいだろう。

昨年度に比べるとやや難化した。また大幅に易化したⅠ期に比べてもだいぶ得点しにくい問題構成であった。一次突破ボーダーは 55% 程度か。